

Inženjerska geodezija 2

PREDAVANJE

GEODETSKE MREŽE INŽENJERSKIH OBJEKATA

dr Milutin Pejović, dipl.geod.inž.

mpejovic@grf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Odsek za geodeziju i geoinformatiku

Beograd, 2026.



GEODETSKE MREŽE INŽENJERSKIH OBJEKATA

1. Geodetska mreža, u najprostijem smislu, predstavlja skup geodetskih tačaka na terenu, čije su koordinate određene kroz postupak merenja i obrade merenja u mreži, u okviru usvojenog koordinatnog sistema.
2. Geodetska mreža – predstavlja materijalizaciju usvojenog koordinatnog sistema na terenu i obezbeđuje pozicioniranje geodetskim metodama u usvojenom koordinatnom sistemu. Međutim, jedna geodetska mreža može da materijalizuje više koordinatnih sistema na terenu. To znači da iste tačke geodetske mreže mogu imati određene koordinate u više koordinatnih sistema. U tom slučaju matematičke relacije transformacije koordinata iz jednog u drugi koordinatni sistem moraju biti određene i jednoznačne. Na primer, geodetska mreža na terenu može biti realizacija lokalnog koordinatnog sistema, a u isto vreme, mogu biti poznate koordinate tačaka geodetske mreže i u Državnom koordinatnom sistemu. Ukoliko se na terenu koristi i GNSS metoda pozicioniranja, koordinate tačaka mreže potrebno je poznavati i u globalnom koordinatnom sistemu, najčešće WGS84.
3. Geodetske mreže inženjerskih objekata projektuju se i realizuju za potrebe geodetskih radova u inženjerstvu – uslovljene su zahtevima realizacije inženjerskih projekata.
4. Iz tog razloga geodetske mreže inženjerskih objekata nazivaju se **geodetskim mrežama posebne namene**. Često se koristi izrazi kao što su geodetska osnova ili geodetski okvir (eng. frame ili control). Navedeni opis geodetske mreže može da važi za sve oblike **geodetskih osnova ili okvira**.
5. Međutim nije svaka geodetska osnova ujdendo i geodetska mreža. Na primer, poligonski vlak (operativni poligon) koji predstavlja tzv. linijsku geodetsku osnovu, najčešće razvijanu za potrebe izgradnje linijskih infrastrukturnih projekata jeste geodetska osnova i služi svim geodetskim radovima za potrebe realizacije inženjerskih infrastrukturnih projekata, ali nema karakteristike geodetske mreže.

KOORDINATNI SISTEMI INŽENJERSKIH OBJEKATA

Koordinatni sistem:

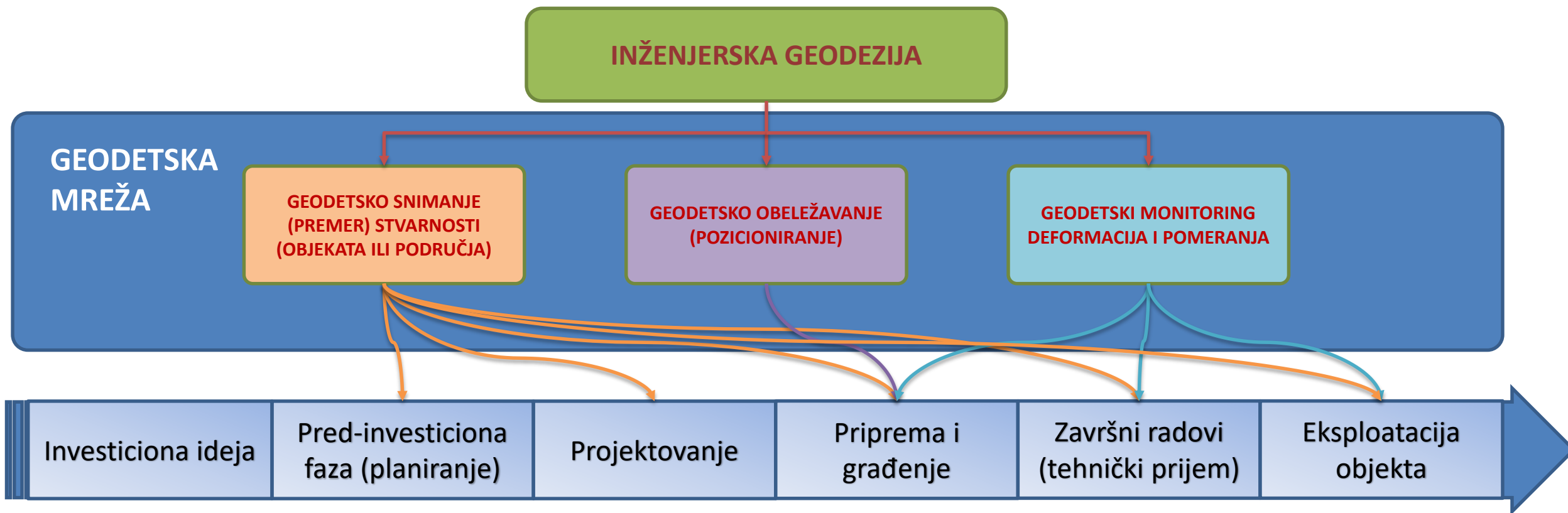
- definiše pravila i matematičke zakonitosti po kojima se koordinate dodeljuju tačkama (ISO 19111:2007),
- predstavlja skup koordinatnih osa sa međusobno definisanim geometrijskim odnosima,
- služi da se položaj svake diskretne tačke u prostoru jednoznačno prikaže pomoću n-torke brojeva,
- od suštinskog je značaja za pravilnu upotrebu digitalnih prostornih podataka (Meyer 2010),
- predstavlja sistem za definisanje tačaka pomoću koordinata koje su izmerene na određeni način (URL).

U praksi, koordinatni sistem postaje operativan tek kada je materijalizovan geodetskom mrežom.

Koordinatni sistemi u upotrebi u inženjerskim projektima, mogu se podeliti na:

- **Globalni koordinatni sistemi na elipsoidu i u projekciji (WGS84, ITRS, ETRF itd) materijalizovani globalnim referentnim mrežama.**
- **Regionalni koordinatni sistemi (Državni koordinatni sistemi) materijalizovani državnim referentnim mrežama.**
- **Lokalni (inženjerski) koordinatni sistemi – definisani za konkretan projekat, prilagođeni projektu.**

GEODETSKI RADOVI U INŽENJERSKIM PROJEKTIMA I ULOGA GEODETSKE MREŽE



ULOGA GEODETSKE MREŽE U FAZA REALIZACIJE INŽENJERSKIH PROJEKATA

1. U početnim fazama realizacije inženjerskih projekata (pred-investiciona faza i faza projektovanja), geodetska mreža služi da definiše jedinstveni koordinatni sistem u kojem će se prikupljati podaci o postojećoj situaciji na terenu i izrađivati podloge za projektovanje.
2. U fazi Pripreme i građenja i fazi Završnih radova i tehničkog prijema objekta, geodetska mreža služi da omogući realizaciju svih geodetskih radova u toku izgradnje:
 - Geodetsko snimanje
 - Geodetsko obeležavanje geometrije objekta
 - Kontrola izvedenih radova (takođe snimanje)
 - Osmatranje deformacija (deformaciona merenja)
3. U fazi eksploatacije, geodetske mreže uglavnom služe za potrebe geodetskih radova na održavanju objekta i osmatranju objekta u toku eksploatacije.

KADA SE USPOSTAVLJAJU GEODETSKE MREŽE INŽENJERSKIH OBJEKATA?

Geodetske mreže inženjerskih objekata razvijaju se u slučajevima kada za time postoji potreba. Potreba za geodetskom mrežom proizilazi iz dva slučaja:

1. Ne postoji geodetska mreža koja bi omogućila izvođenje geodetskih radova na terenu;
2. Postoji geodetska osnova (mreža ili deo mreže koja je ranije razvijana) ali svojim karakteristikama (koordinatni sistem, preciznost geodetske mreže, raspored tačaka itd.) ne zadovoljava zahteve projekta.

KARAKTERISTIKE GEODETSKIH MREŽA INŽENJERSKIH OBJEKATA

1. **Ažurnost** – Geodetska mreža mora biti uspostavljena i dostupna u skladu sa dinamikom projekta, tako da ne predstavlja ograničenje za izvođenje radova, odnosno geodetska mreža mora obezbediti pravovremenu podršku svim fazama realizacije projekta.
2. **Trajnost** – Tačke geodetske mreže moraju biti dugoročno stabilne i otporne na uticaje iz okruženja i građevinskih aktivnosti, odnosno mora biti obezbeđena stabilnost koordinatnog sistema kroz vreme.
3. **Tačnost** – Geodetska mreža mora obezbediti nivo tačnosti koji je usklađen sa zahtevima projekta i tolerancijama izvođenja radova, odnosno tačnost geodetske mreže mora biti kompatibilna sa zahtevima projektne dokumentacije.
4. **Geometrijska (konfiguracijska) fleksibilnost** - Geodetska mreža treba da omogući proširenje, modifikaciju ili rekonstrukciju u skladu sa promenama na projektu, odnosno geodetska mreža mora omogućiti adaptaciju na promene u obuhvatu i dinamici radova.

TIPOVI GEODETSKIH MREŽA

1. **1D / 2D / 2D +1D / 3D** – prema dimenzionalnosti
2. **Slobodna / Neslobodna** – prema načinu pozicioniranja geodetske mreže u okviru drugog (referentnog) koordinatnog sistema.
3. **Terestričke** (totalna stanica, nivelir) / **Satelitske** (GNSS)
4. **Osnovna / Kontrolna** – po konfiguraciji:
 - a) Osnovna – definiše koordinatni sistem - uključuje samo tačke van objekta,
 - b) Kontrolna uključuje tačke na objektu i najčešće služi monitoringu deformacija.
5. **Pasivna / Aktivna** – po načinu pozicioniranja:
 - a) pasivne su tradicionalne geodetske mreže,
 - b) aktivne integrišu merni sistem (servis) u geodetsku mrežu koji omogućava precizno pozicioniranje u realnom vremenu, primer su geodetske mreže permanentnih GNSS stanica.

OBLICI (KONFIGURACIJE) GEODETSKIH MREŽA INŽENJERSKIH OBJEKATA

Oblik (konfiguracija) geodetskih mreža inženjerskih objekata zavisi od više međusobno povezanih faktora:

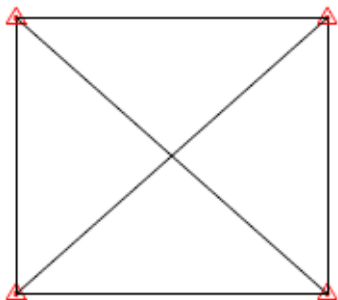
1. Konfiguracija terena (reljef, preglednost, prirodne prepreke);
2. Zahtevima i ograničenjima inženjerskog projekta:
 - a) Tipa objekta (put, most, tunel)
 - b) Svih elemenata i prostorne konfiguracije projektovanog objekta;
 - c) Tehnologije građenja;
 - d) Potrebne tačnosti (preciznosti) određenih faza radova;
 - e) Organizacije gradilišta.
3. Načinom korišćenja (načinom pozicioniranja) i svrhom geodetske mreže u toku radova;
4. Geodetskom mernom opremom koja se koristi u toku uspostavljanja geodetske mreže i u toku realizacije projekta (totalne stanice zahtevaju dogledanje između tačaka, GNSS zahteva otvoreno nebo, geometrijski nivelman zahteva mogućnost nivelanja itd.) .

Optimalna konfiguracija mreže predstavlja kompromis između tehničkih zahteva, ograničenja, uslova na terenu i raspoložive opreme.

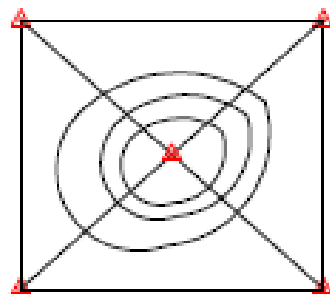
OPŠTA PRAVILA DOBRE GEOMETRIJE MREŽE

1. **ZATVORENE GEOMETRIJSKE FORME** – Dobru geometriju mreže karakterišu skup zatvorenih geometrijskih formi (trouglovi, četvorouglovi, poligoni itd. kojima se obezbeđuje suvišnost merenja, dobra povezanost mreže, a time i dobri uslovi za ocenu koordinata i kontrola merenja.
2. **REDUDANTNOST MERENJA** – Redundantnost predstavlja višak merenja u odnosu na minimalan broj potreban za određivanje nepoznatih parametara (koordinata). Visoka redundantnost obezbeđuje pouzdanu ocenu tačnosti i kontrolu geodetskih merenja, kao robusnost geodetske mreže na potencijalni izostanak nekih merenja.
3. **RAVNOMERNA RASPOREĐENOST TAČAKA I MERENJA** – Ravnomerna raspoređenost tačaka i merenja podrazumeva da se u prostoru koji mreža obuhvata podjednako rasporede tačke i merenja koje se susstiču u tačkama. Time se obezbeđuje homogena tačnost geodetske mreže.
4. **USKLAĐENOST SA OKOLNIM PROSTOROM I PROJEKTOM** – Prostorna usklađenost sa okolinom i projektom su neizostavni činilac dobre geometrije mreže. Dobra usklađenost sa okolnim prostornom i projektom obezbeđuje funkcionalnost i upotrebljivost geodetske mreže.

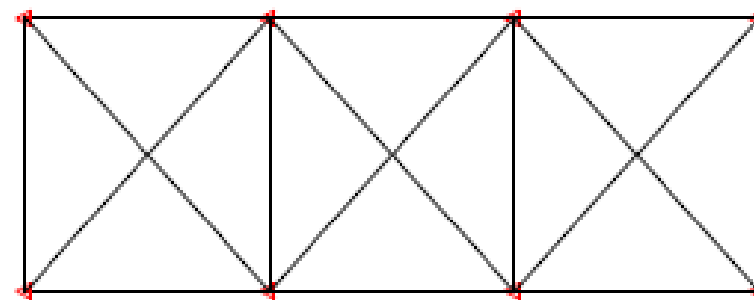
ŠKOLSKI PRIMERI OBLIKA (KONFIGURACIJA) GEODETSKIH MREŽA



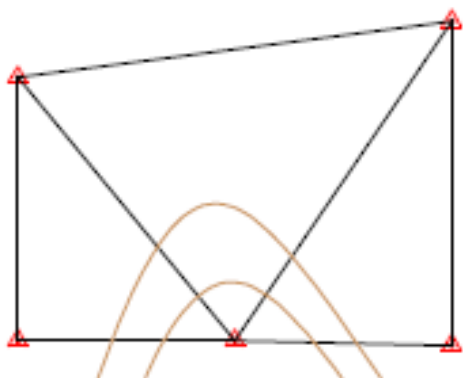
Geodetski četvorougao



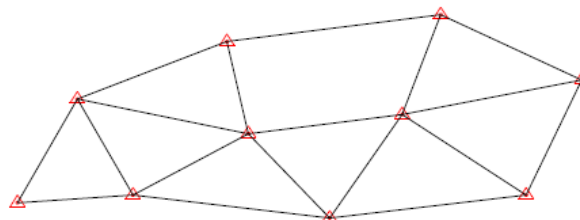
Centralni sistem



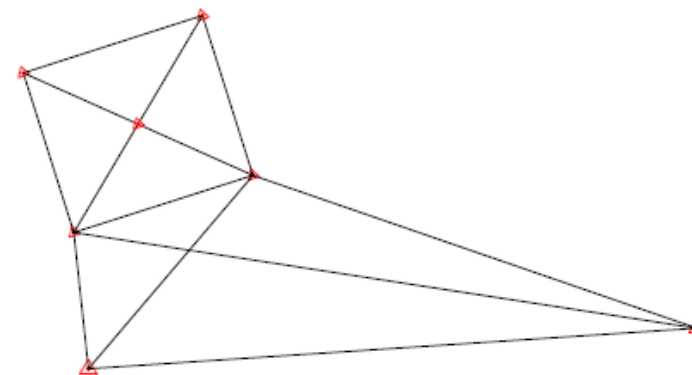
Lanac geodetskih četvorouglova



Lanac geodetskih trouglova

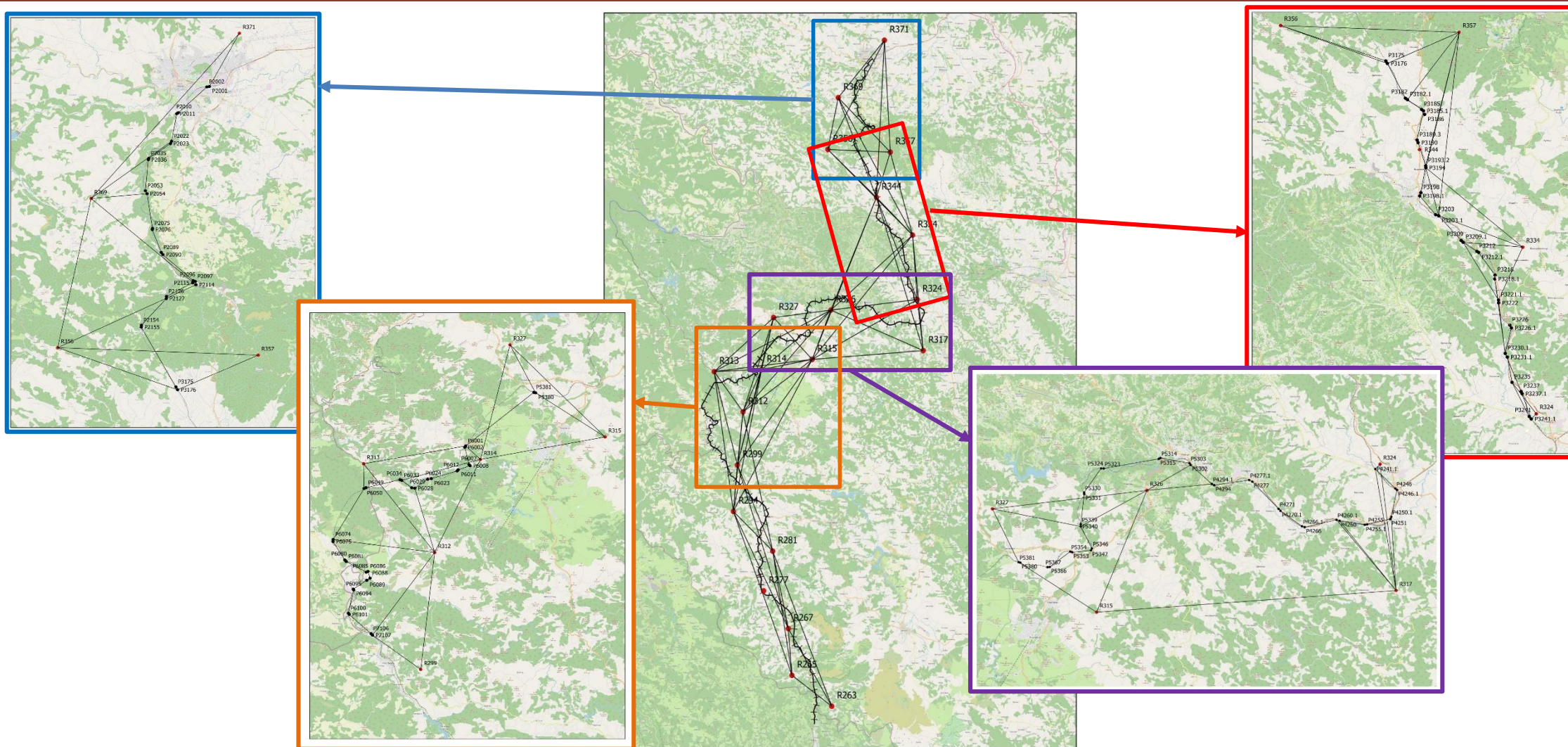


Mreža trouglova

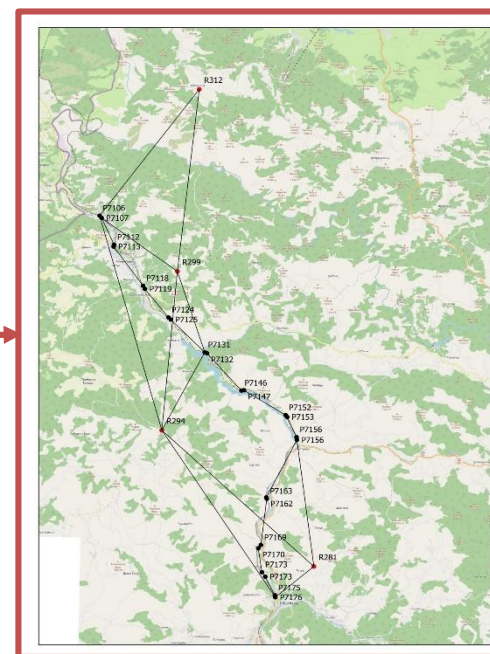
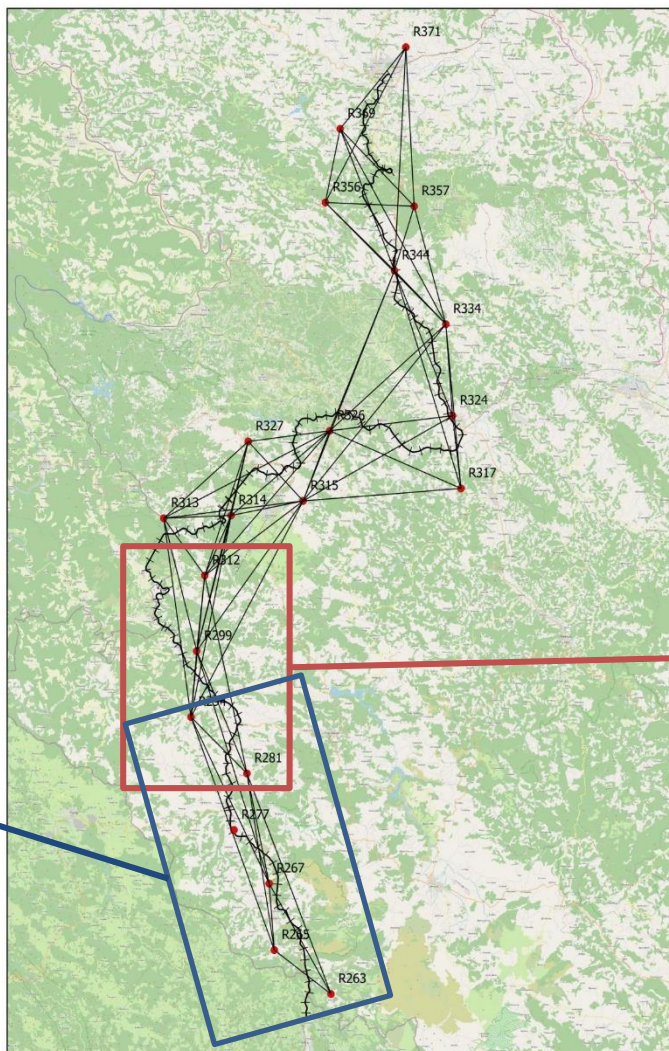
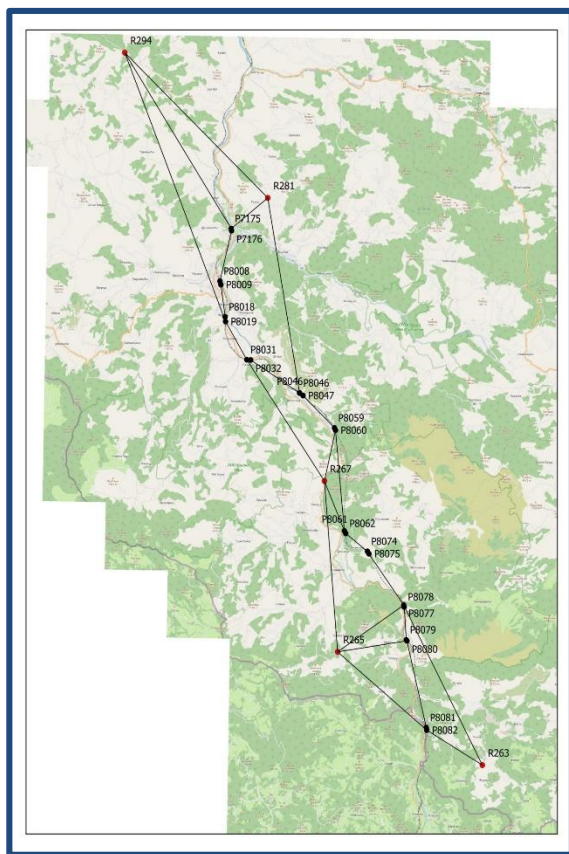


Kombinacija četvorougla i centralnog sistema

GEODETSKE MREŽE INFRASTRUKTURNIH PROJEKATA – PRUGA BEOGRAD - BAR

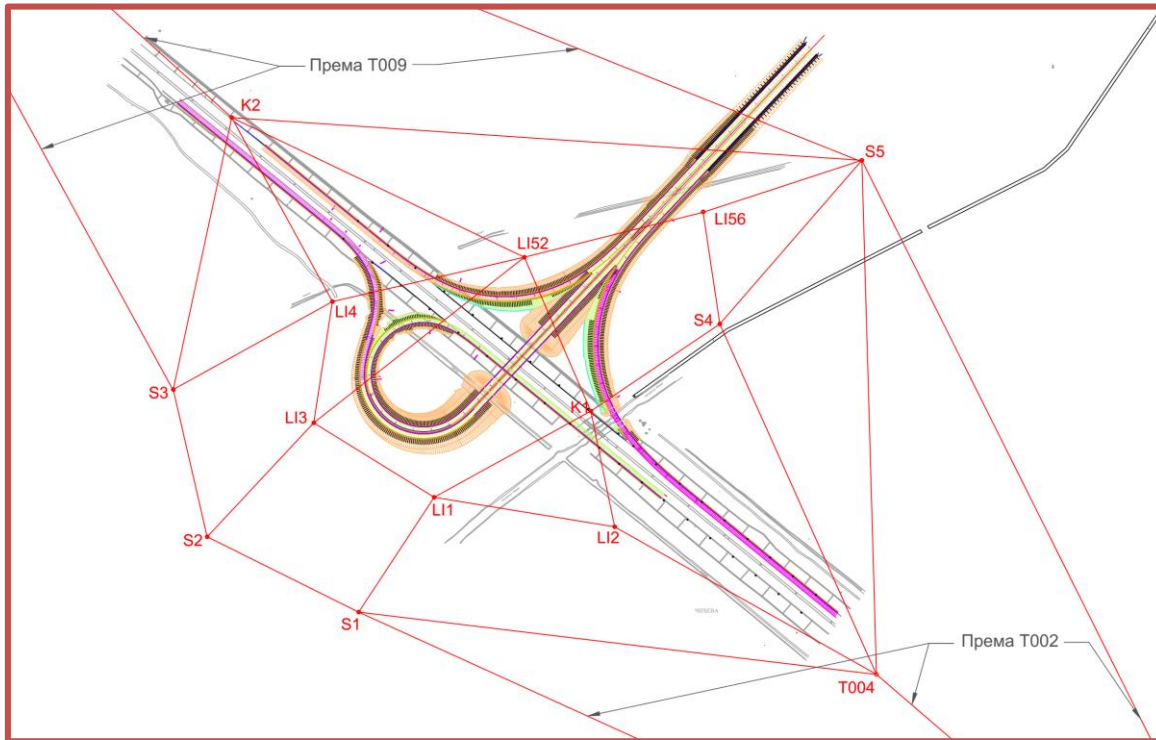


GEODETSKE MREŽE INFRASTRUKTURNIH PROJEKATA – PRUGA BEOGRAD - BAR

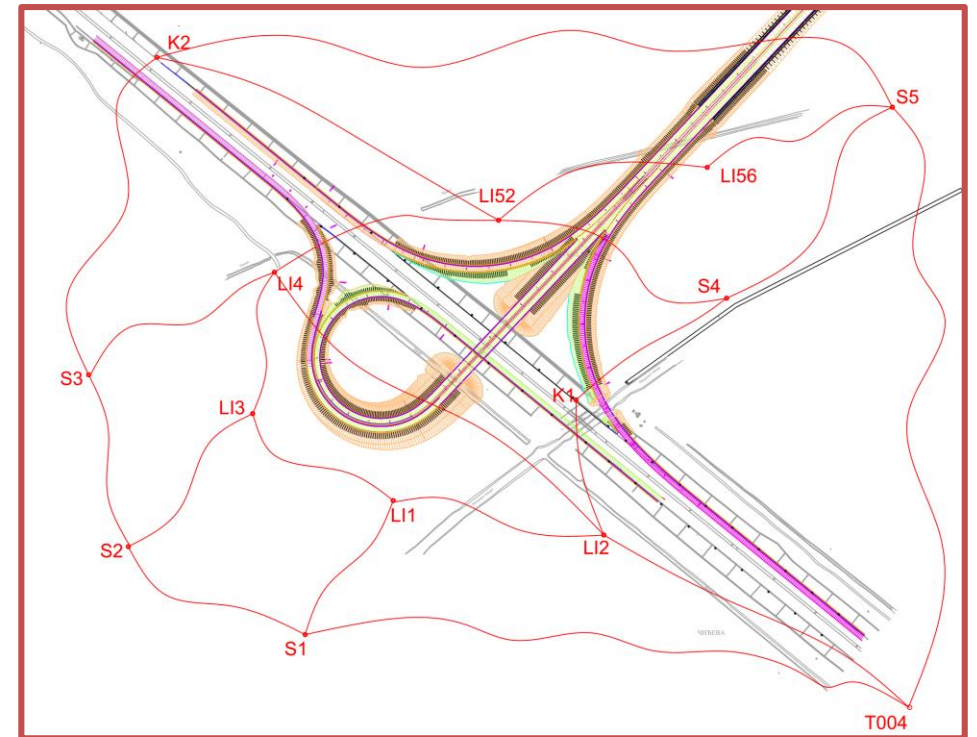


GEODETSKA MREŽA PETLJE

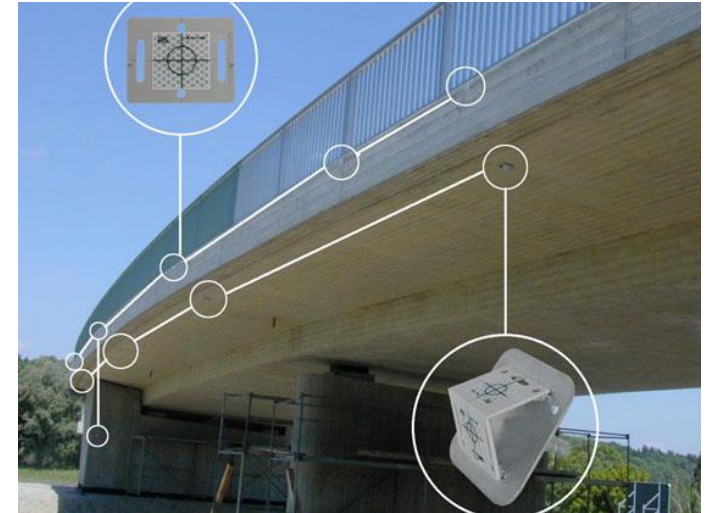
2D



1D

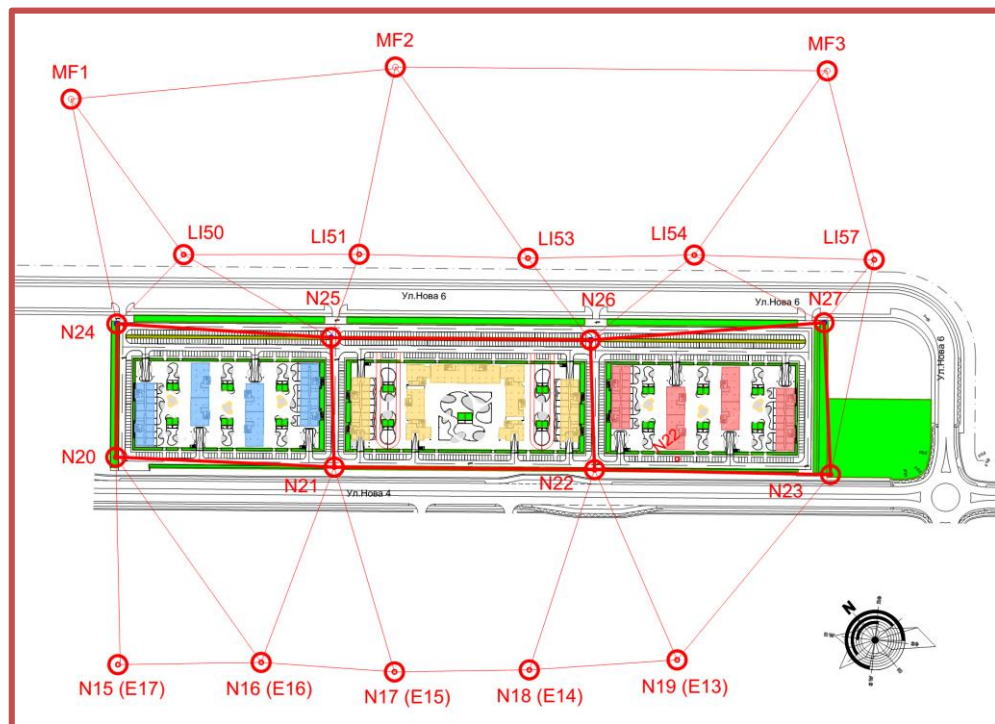


dr. Milutin Pejovic, dipl. geod.Inž.
mpejovic@grf.bg.ac.rs

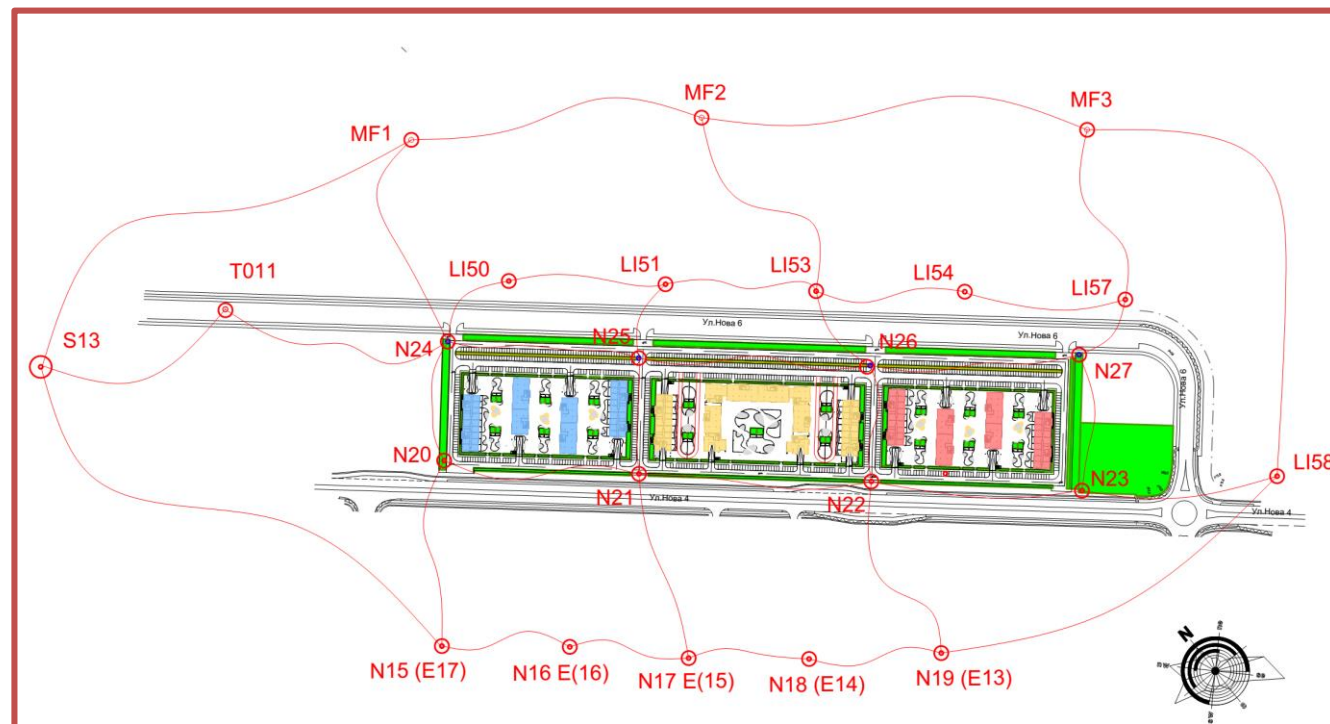


GEODETSKA MREŽA NASELJA

2D

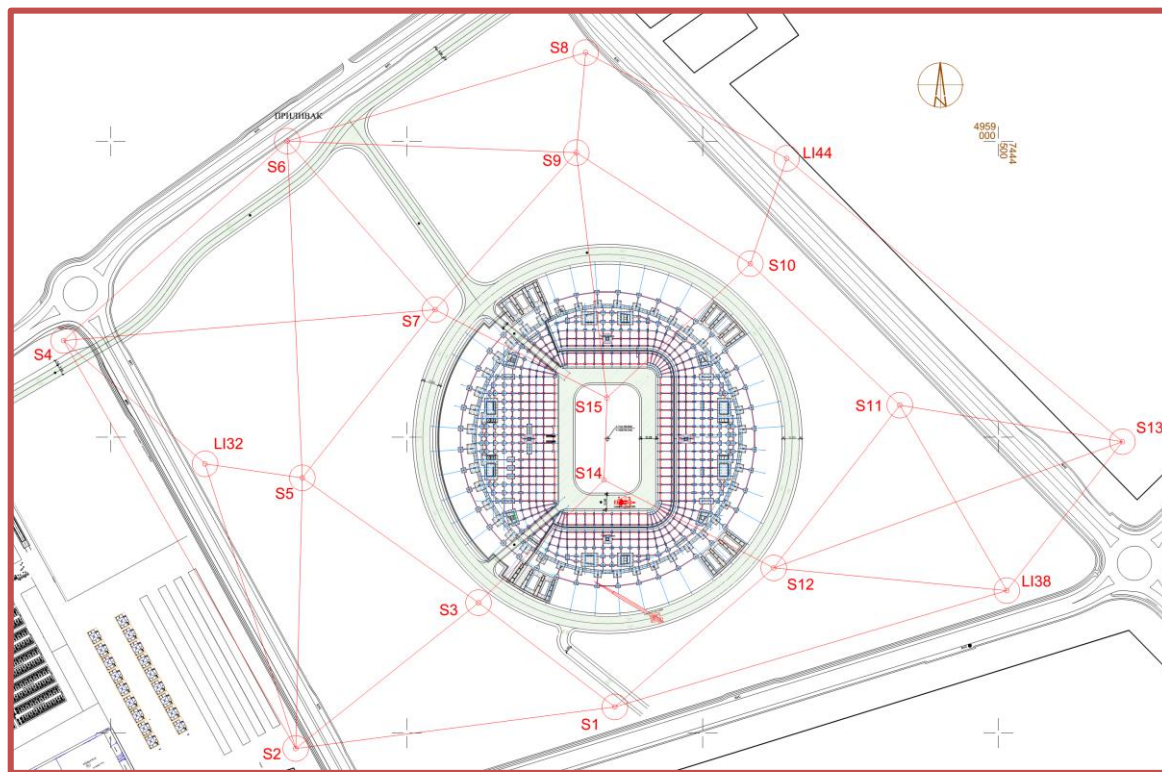


1D

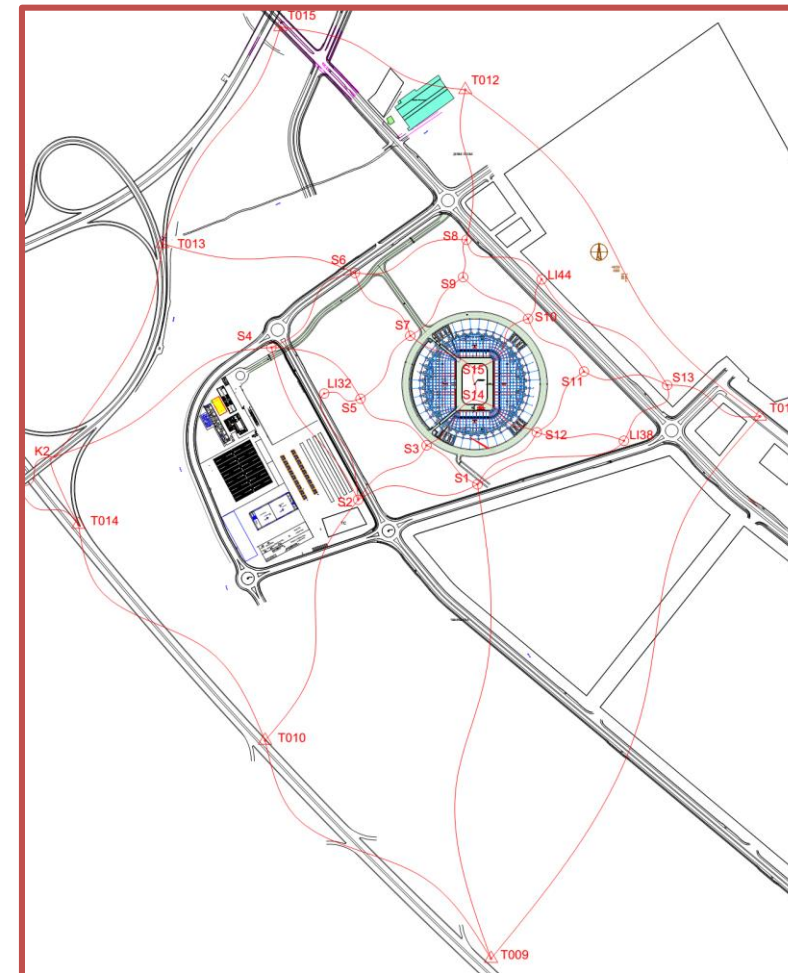


GEODETSKA MREŽA NACIONALNOG FUDBALSKOG STADIONA

2D



1D

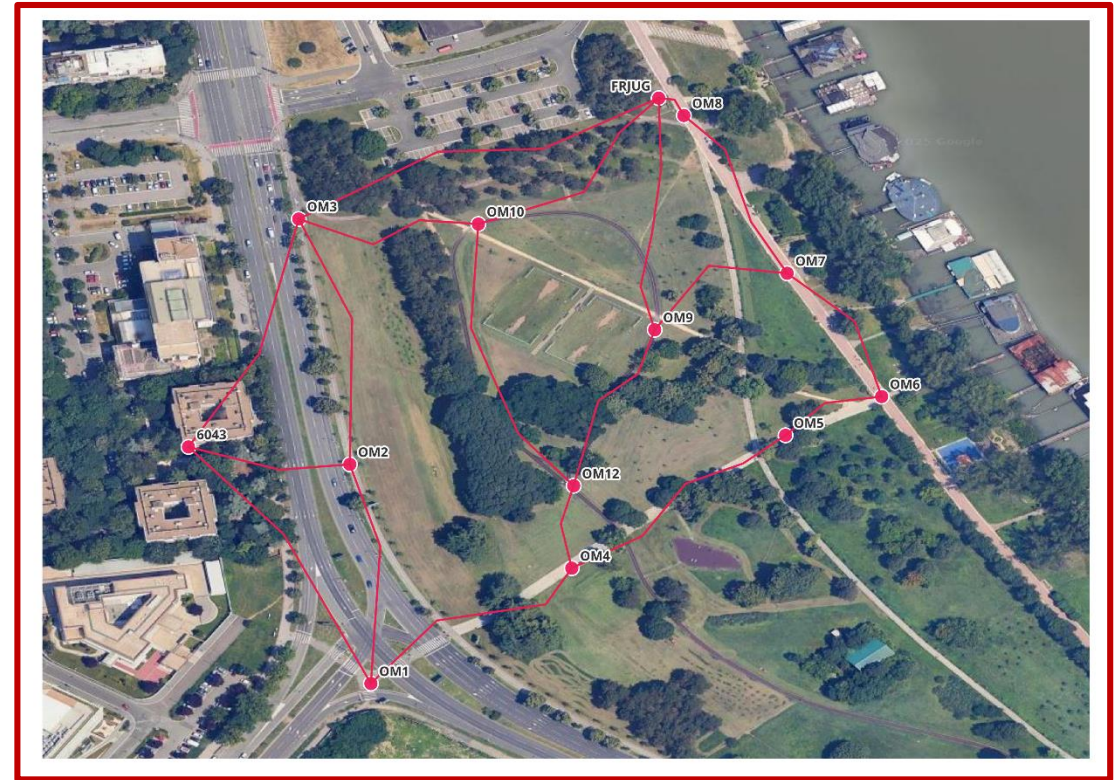


GEODETSKA MREŽA PROJEKTA AKVARIJUMA

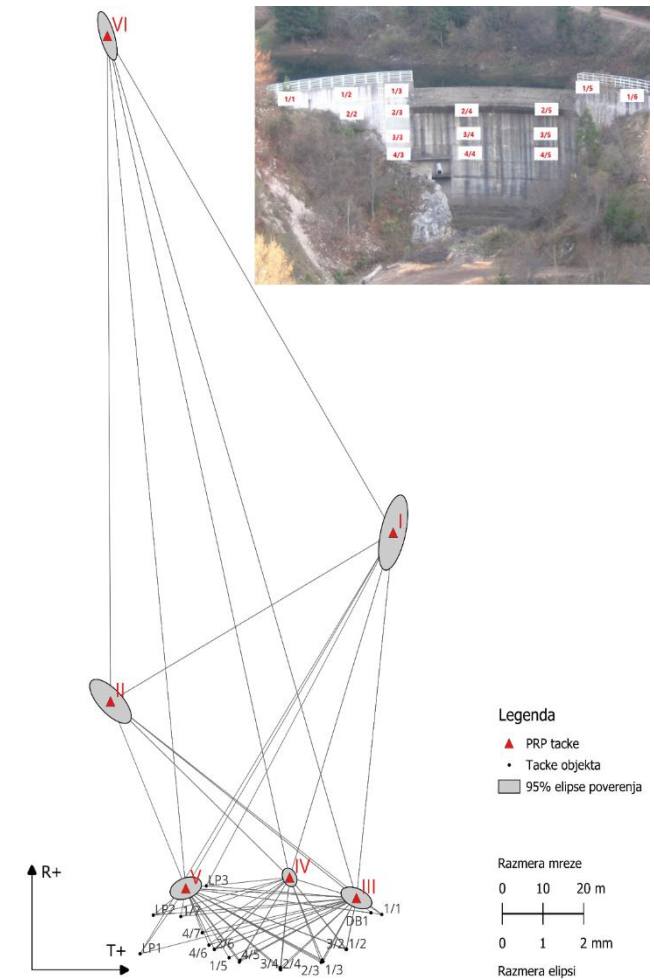
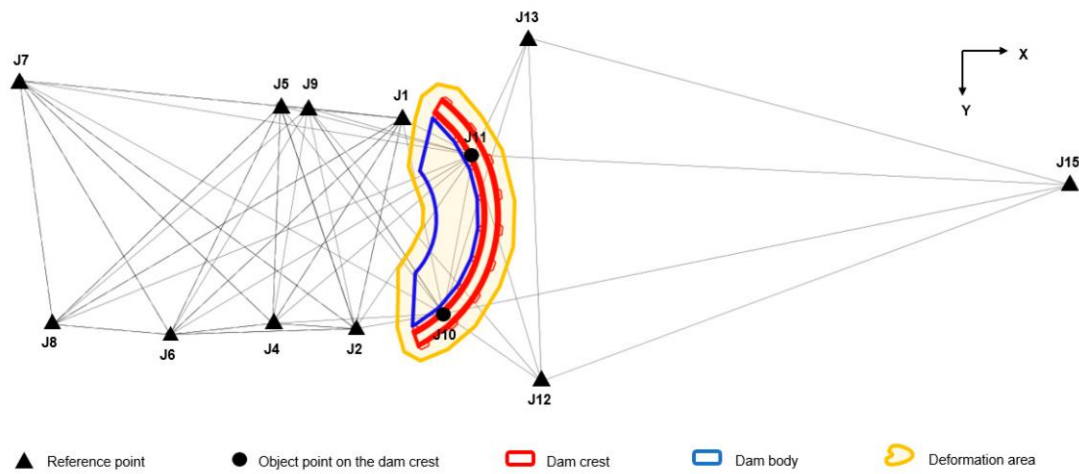
2D



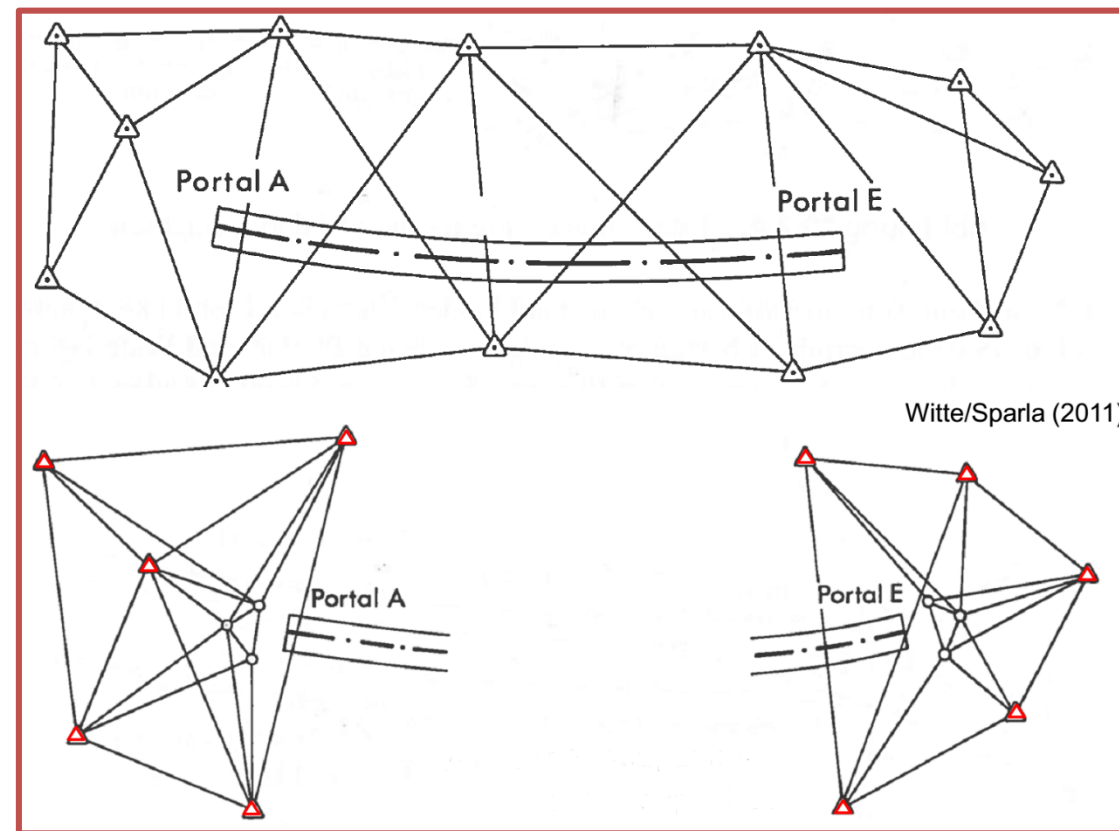
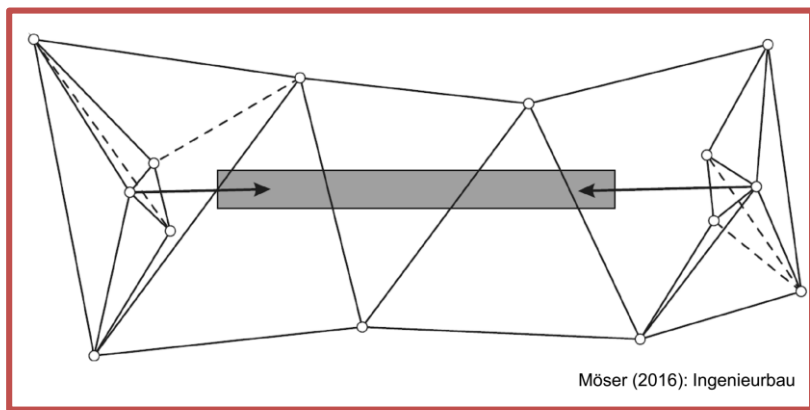
1D



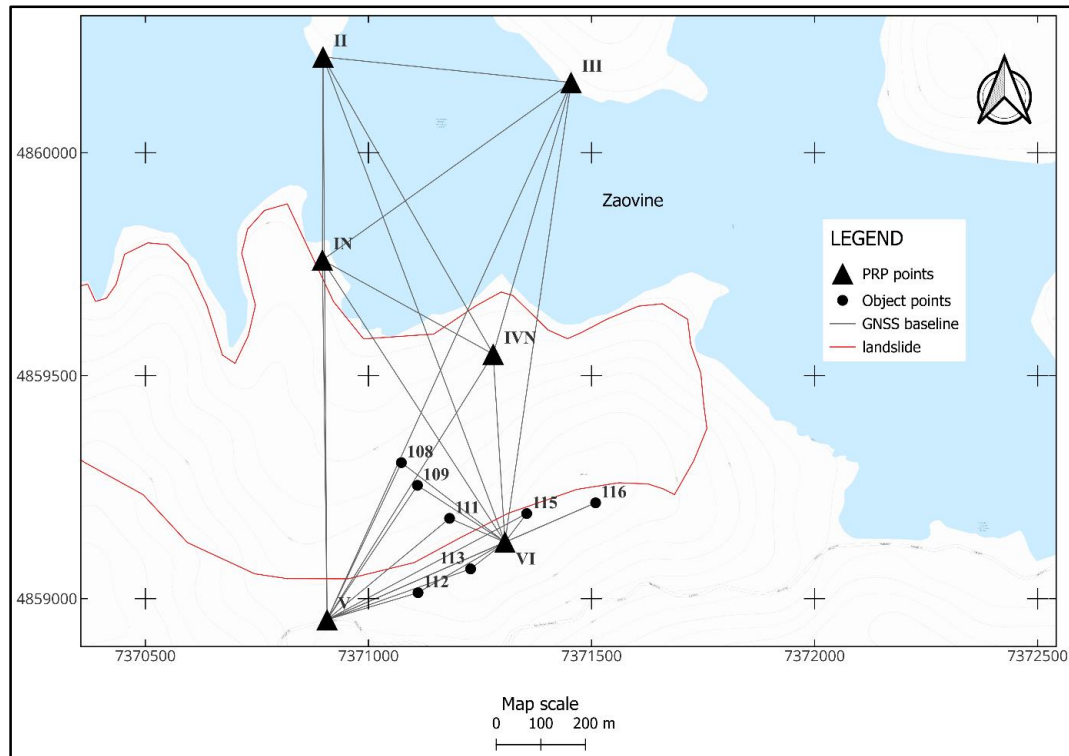
GEODETSKE MREŽE BRANA



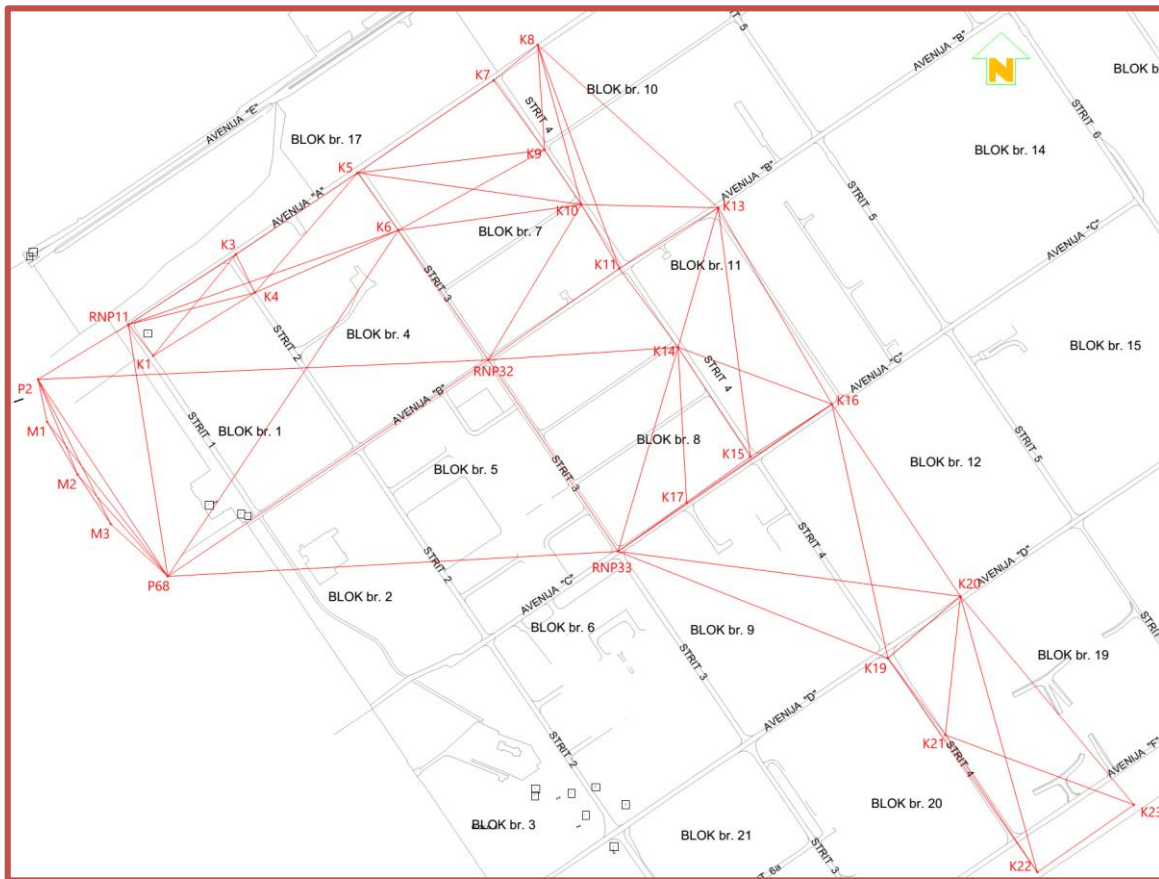
GEODETSKA MREŽE TUNELA



GEODETSKE MREŽE KLIZIŠTA

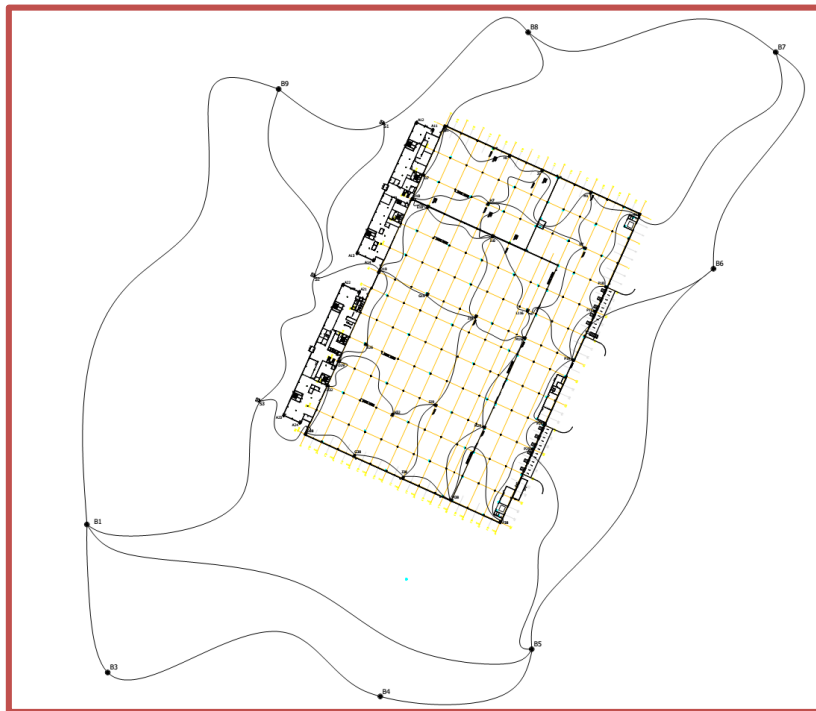


GEODETSKA MREŽA RAFINERIJE PANČEVO

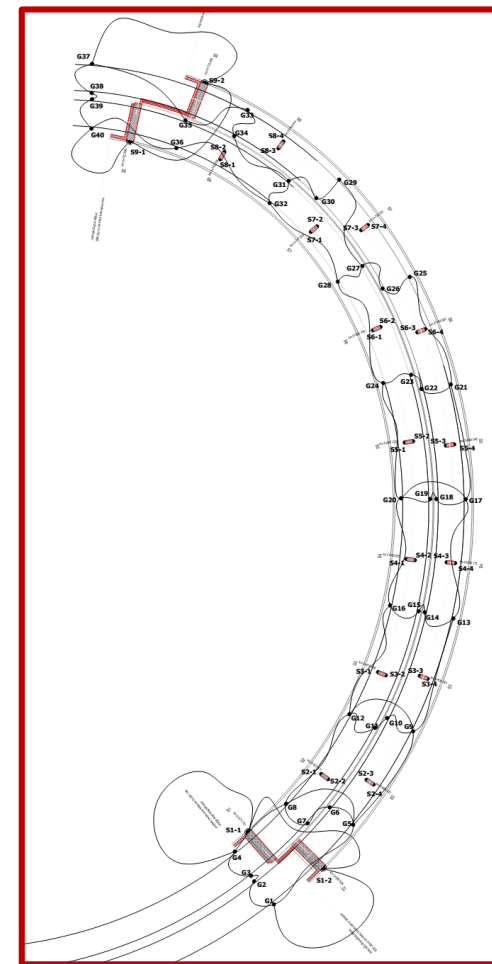
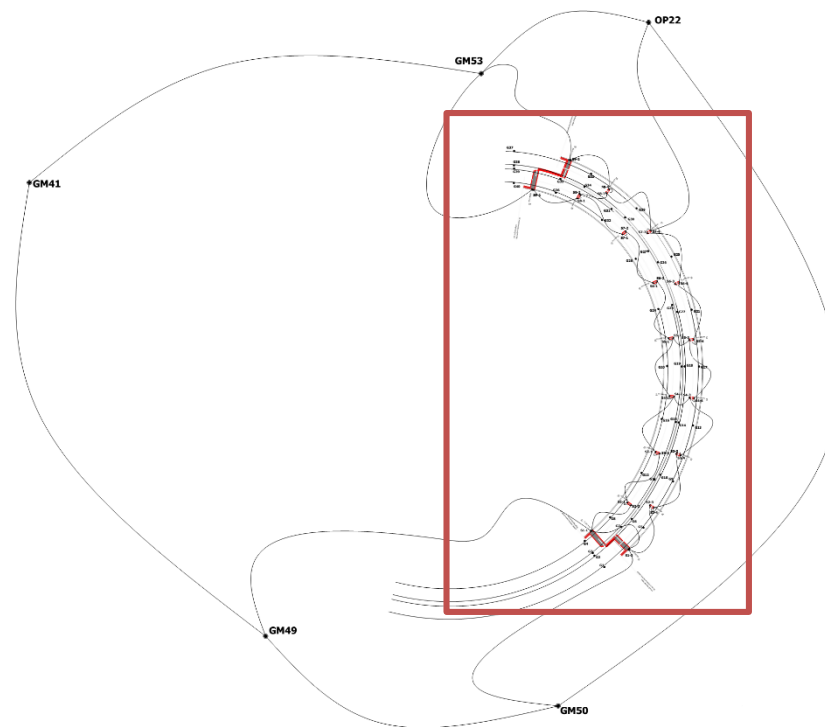


GEODETSKA MREŽE ZA POTREBE OSMATRANJA SLEGANJA

Fabrika BROSE u Pančevu



Vijadukt na trasi NIŠ - MEROŠINA



IZBOR LOKACIJE (POLOŽAJA) TAČKA GEODETSKE MREŽE

- Jedan od najvažnijih zadataka prilikom uspostavljanja mreže je izbor položaja tačaka;
- Obilazak terena i analiza lokacije u cilju izbora optimalnih položaja tačaka geodetske mreže naziva se **rekognosciranje**;
- Greške napravljene u fazi rekognosciranja najčešće se kasnije ne mogu u potpunosti ispraviti merenjima i obradom.

IZBOR (LOKACIJE) POLOŽAJA TAČKA GEODETSKE MREŽE

Kriterijumi za izbor položaja tačaka

1. Stabilnost terena

→ Odabrati pogodno tlo (izbegavati klizišta, močvarna i vodoplavna tla, zone pod uticajem radova)

2. Vidljivost (dogledanje)

→ obezbediti dogledanje tačaka (između tačaka mreže i sa potencijalnih lokacija radova)

3. Pristupačnost

→ obezbediti pristup tačkama, mogućnost merenja i održavanja tačaka

4. Zaštita (bezbednost) tačaka

→ Obezbediti tačke od uništenja, izbegavati zone intenzivnih radova

5. Geometrija mreže

→ povoljan raspored za geometriju mreže i za potrebe pozicioniranja (dobar presek).

STABILIZACIJA TAČAKA I GEODETSKA MERNÁ OPREMA ZA MERENJA U MREŽI

Stabilizacija tačaka geodetske mreže na terenu je važan faktor u funkcionalnosti geodetske mreže.

Tačke geodetske mreže moraju biti adekvatno stabilizovane na terenu kako bi geodetska mreža održala svoju funkcionalnost, pre svega u pogledu očuvanja materijalizacije koordinatnog sistema i omogućavanja realizacije geodetskih radova.

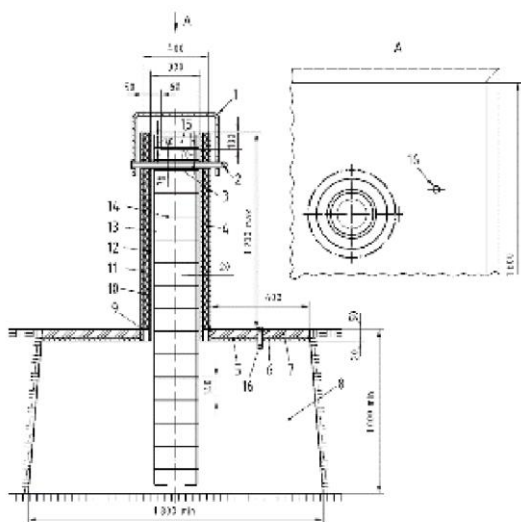
Postoje različiti, u praksi potvrđeni, načini stabilizacije geodetskih tačaka na terenu, od geodetskih belega, geodetskih stubova, bolcni, geodetskih repera, reflektujućih signala itd.

STABILIZACIJA TAČAKA I GEODETSKA MERNÁ OPREMA ZA MERENJA U MREŽI

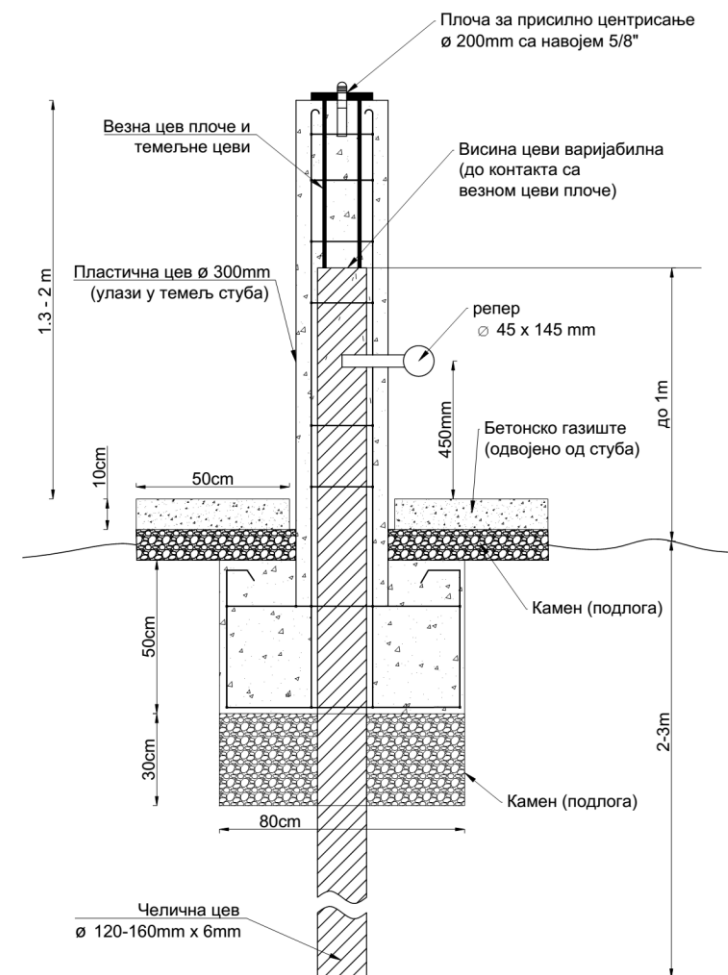
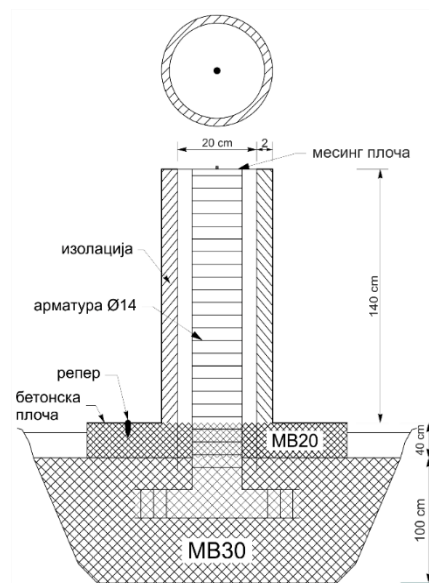
Izbor načina stabilizacije zavisi od više faktora:

1. Dimenzionalnosti geodetske mreže (1D ili 2D/3D) – za 1D geodetske mreže koriste se horizontalni i vertikalni reperi, dok se za 2D/3D geodetske mreže koriste standardne geodetske tačke (belege, geodetski stubovi sa reperom i slično),
2. Pogodnost terena (podloge) – karakteristike terena značajno utiču na izbor stabilizacije. Postoje zemljišta koja zahtevaju dublja fundiranja geodetskih tačaka, dok sa druge strane stabilizacija tačaka na asfaltnim i betonskim površinama to ne zahteva.
3. Pogodnost lokacije u pogledu dostupnosti geodetske tačke – teže dostupne tačke biće stabilizovane trajnim signalima.
4. Nivo preciznosti merenja – nivo preciznosti merenja značajno utiče na izbor načina stabilizacije. Na primer, precizna geodetska merenja, uglavnom se izvode sa geodetskih stubova, jer oni omogućavaju redukciju uticaja različitih izvora grešaka pri merenju. Sa druge strane, za precizna, merenja potrebne su takođe i odgovarajuće prizme, ukoliko se merenja rade totalnom stanicom.
5. Lokacija tačke – na objektu ili van objekta (na terenu) – za tačke na objektima, u zavisnosti od toga da li se radi o tačkama 1D mreže ili 2D/3D mreže stabilizuju se geodetskih reperima ili reflektujućim signalima (markicama ili prizmama na nosačima) ili postoljima na kojima je moguće postaviti instrument (u tunelima). Dok se tačke van objekta stabilizuju standardnim geodetskim tačkama u skladu sa gore navedenim kriterijumima izbora lokacije i faktora koji utiču na način stabilizacije.

STABILIZACIJA TAČAKA – Geodetski stubovi



DIN 18710-1



STABILIZACIJA TAČKA I GEODETSKA MERNA OPREMA ZA MERENJA U MREŽI



STABILIZACIJA TAČKA I GEODETSKA MERNA OPREMA ZA MERENJA U MREŽI



STABILIZACIJA TAČKA I GEODETSKA MERNA OPREMA ZA MERENJA U MREŽI



Quelle: Benecke/Kalz/Kuchenbecker/Petrat, 2005

STABILIZACIJA TAČAKA I GEODETSKA MERNA OPREMA ZA MERENJA U MREŽI



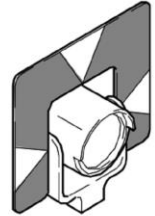
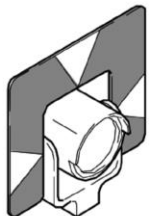
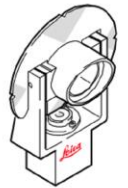
Centring
accuracy

0,2 mm

< 0,1 mm

< 0,05 mm

< 0,015 mm

Model:	GPH1P	GPR121	GPR1+GPH1	Mini GMP101	GRZ122	GMP111
Image:						
Material:	Metal	Metal	Plastic	Metal	Metal	Metal
Centring Accuracy:	0,3 mm	1,0 mm	2,0 mm	1,0 mm	2,0 mm	2,0 mm
Reflector Constant	0	0	0	+17,5mm	+23,1 mm	+30 mm

STABILIZACIJA TAČAKA I GEODETSKA MERNÁ OPREMA ZA MERENJA U MREŽI

GST120-9	GST101	Trimax	GST05	GST05L	GST103
					

Model Name	GST120-9	GST101	Trimax	GST05	GST05L	GST103
Leica product for which suitable	All TPS	All TPS	TPS >5"	GPS antenna Prisms	Prisms Levels	Prisms Levels
Material	Beech wood	Pine wood	Fibreglass	Pine wood	Aluminium	Aluminium
ISO Classification	Heavy	Heavy	Heavy	Light	Light	Light
Height stability	0.02 mm	0.03 mm	0.05 mm	0.02 mm	0.03 mm	0.03 mm
Tripod hysteresis	1" (2 ^{cc})	1" (3 ^{cc})	2" (6 ^{cc})	3" (8 ^{cc})	4" (11 ^{cc})	10" (30 ^{cc})
Tribrach hysteresis	1" (3 ^{cc})	1" (3 ^{cc})	1" (3 ^{cc})	3" (10 ^{cc})	3" (10 ^{cc})	3" (10 ^{cc})
Max. possible influence	2" (5 ^{cc})	2" (6 ^{cc})	3" (9 ^{cc})	6" (18 ^{cc})	7" (21 ^{cc})	13" (40 ^{cc})
Hz Drift after 3 hours	2" (7 ^{cc})	1" (4 ^{cc})	5" (14 ^{cc})	1" (3 ^{cc})	8" (23 ^{cc})	3" (9 ^{cc})

STABILIZACIJA TAČAKA I GEODETSKA MERNA OPREMA ZA MERENJA U MREŽI

Leica Geosystems Total Station Comparison Chart



								
	Leica FlexLine TS03	Leica FlexLine TS07	Leica FlexLine TS10	Leica TS13	Leica TS20	Leica Nova TM60	Leica Nova TS60	Leica Nova MS60
	Manual Total Stations			Robotic Total Stations				MultiStation
Angular accuracy	2", 3", 5"	1", 2", 3", 5", 7"	1", 2", 3", 5"	1", 2", 3", 5"	1", 2", 3", 5"	0.5", 1"	0.5"	1"
Prism range (GPR1, GPH1P)	0.9 m to 3'500 m > 10'000 m (Long Range mode)	0.9 m to 3'500 m > 10'000 m (Long Range mode)	0.9 m to 3'500 m > 10'000 m (Long Range mode)	0.9 m to 3'500 m > 10'000 m (Long Range mode)	0.8 m to 10'000 m	0.9 m to 3'500 m > 10'000 m (Long Range mode)	0.9 m to 3'500 m > 10'000 m (Long Range mode)	1.5 m to > 10'000 m
Distance measurement accuracy on prism	1.0 mm + 1.5 ppm	1.0 mm + 1.5 ppm	1.0 mm + 1.5 ppm	1.0 mm + 1.5 ppm	1 mm + 1.0 ppm	0.6 mm + 1 ppm	0.6 mm + 1 ppm	1.0 mm + 1.5 ppm
PinPoint EDM: reflectorless range ¹	R500: > 500 m	R500: > 500 m R1000: > 1'000 m	R500: > 500 m R1000: > 1'000 m	R500: > 500 m R1000: > 1'000 m	R800: > 800 m; LC2 R1600: > 1600 m; LC3R	R1000: > 1'000 m	R1000: > 1'000 m	R2000: > 2'000 m
Distance measurement accuracy reflectorless	2 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm	0 m - 500 m: 2 mm + 2 ppm > 500 m: 4 mm + 2 ppm
Display	3.5" QVGA 28 keys grayscale	3.5" QVGA 28 keys colour touchscreen	5" WVGA 25 keys (standard) colour touchscreen 5" WVGA 37 keys (optional) colour touchscreen	Keyboard Unit 4 keys or 5" WVGA 25 keys colour touchscreen	5" WVGA 37 keys multi-touch colour screen	5" WVGA 37 keys colour touchscreen	5" WVGA 37 keys colour touchscreen	5" WVGA 37 keys colour touchscreen
Key illumination	✗	✓	✓	✓ (with 5" WVGA screen)	✓	✓	✓	✓
Face II display	✗	•	•	• (with 5" WVGA screen)	•	•	✓	✓
Electronic guide light (EGL)	✗	• (R1000 only)	• (R1000 only)	✓	✓	✗	✓	✓
Interfaces (wired)	RS232 / SD / USB	RS232 / SD / USB	RS232 / SD / USB	RS232 / SD / USB	Ethernet / USB-C	RS232 / SD / USB	RS232 / SD / USB	RS232 / SD / USB
BT / WLAN	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Mobile data (GSM / UMTS / LTE)	✗	•	•	✗	•	✗	✗	✗
Long range BT communication	✗	✗	✗	• (with radio handle)	✓	✓ (with radio handle)	✓ (with radio handle)	✓ (with radio handle)
AutoHeight	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
Overview camera	✗	✗	•	✗	•	•	✓	✓
Telescope camera	✗	✗	✗	✗	✗	•	✓	✓
SmartStation (GNSS) capability	✗	✗	✗	•	✗	•	•	•
Motorisation	✗	✗	✗	DC drives	Brushless DC direct drives	Piezo drives	Piezo drives	Piezo drives
Automatic target aiming	✗	✗	✗	✓	✓ (AI-powered)	✓ (Long range)	✓	✓
Prism fast search	✗	✗	✗	• (SpeedSearch)	✓ (except TS20 A)	✗	✓ (PowerSearch)	✓ (PowerSearch)
Prism lock	✗	✗	✗	•	✓	✗	✓	✓
Scanning	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓ (up to 30'000 pts/s)
Autofocus	✗	✗	✗	✗	✓	•	✓	✓
Remote control	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Matematički model geodetske mreže

- **Matematički model**
- **Izravnanje i ocena parametara (MNK)**
- **Datum geodetskih mreža**
- **Statistička testiranja**

Model geodetske mreže

Geodetska mreža predstavlja jedan geometrijski sistem čije relacije su određene merenjima. U jednom takvom sistemu, mi smo najčešće zainteresovani da odredimo koordinate tačaka. To znači da želimo da opišemo jedan takav sistem preko koordinata tačaka mreže. To praktično znači da želimo da odredimo oblik, veličinu i položaj tog sistema u koordinatnom sistemu preko koordinata tačaka. U tom kontekstu, sa jedne strane imamo merenja, a sa druge strane imamo nepoznate parametre (koordinate tačaka) koje želimo da odredimo. Kada je to definisano, tada kažemo da je definisan model tog sistema. Taj model je određen minimalnim brojem parametara koji određuju sistem u tom smislu.

Međutim, sistem kao što je geodetska mreža, ne mora biti modeliran samo preko koordinata tačaka. Mogu se postaviti drugi modeli koji imaju za cilj da sistem definišu u drugom smislu (samo oblik ili oblik i veličina) i u tom kontekstu, sistem kao što je geodetska mreža ne mora biti nužno modeliran koordinatama tačaka.

Na primer, ako posmatramo jedan trougao u kojem je izmereno sva tri ugla i sve tri dužine. Različiti modeli se mogu postaviti u zavisnosti od cilja istraživanja:

- **Oblik trougla** – ovakav striktno geometrijski model jednoznačno je određen sa dva različita parametra (minimalan broj). Oni mogu biti izabrani kao bilo koja dva od tri ugla ili kao odnosi tri stranice (proizvoljan izbor).
- **Veličina i oblik trougla** – ovaj model uključuje i određivanje dimenzija, te stoga zahteva najmanje tri različita parametra (koji, prema tome, ne mogu biti svi uglovi, pošto je linearna dimenzija neophodna za određivanje veličine). Ostaje više mogućnosti izbora, kao što su dva ugla i jedna stranica, dve stranice i jedan ugao, ili tri stranice.
- Ako su, pored toga, od interesa i **položaj i orijentacija trougla** u odnosu na zadati Dekartov koordinatni sistem, tada je model definisan sa ukupno šest parametara.

Model geodetske mreže i redundantna merenja

Kao što je prethodno rečeno, kada je model izabran, tada postoji minimalni broj različitih parametara koji određuju sistem u određenom smislu (u). Ukoliko broj merenja označimo sa (n), i ukoliko taj broj nije dovoljan da se odredi u -nepoznatih parametara, tada kažemo da je sistem neodređen. Ukoliko postoji veći broj merenja nego što je broj minimalnih parametara, tada kažemo da je sistem pred-određen, odnosno da postoji redundantnost.

Geodetske mreže se projektuju tako da postoji više od strogo minimalnog broja merenja potrebnih za određivanje nepoznatih parametara (npr. koordinata tačaka). Svako dodatno merenje naziva se redundantnim merenjem. Osnovna uloga redundantnih merenja jeste obezbeđivanje nezavisne kontrole prilikom izračunavanja nepoznatih parametara. Imajući u vidu da su merenja neizbežno opterećena slučajnim greškama, izračunavanje parametara na osnovu različitih podskupova redundantnih merenja rezultiraće različitim vrednostima parametara. Ako se postavi pitanje, koje rešenje parametara najbolje odgovara svim realizovanim merenjima, tada dolazimo do potrebe za **Izravanjem geodetskih mreža**. Izravljanje geodetskih mreža, u statističkom smislu ima za cilj upravo da nam omogući ocenu nepoznatih parametara (kao slučajnih veličina) i parametre njihove raspodele verovatnoća, a koji najbolje odgovaraju celom skupu merenja. **Metod Najmanjih Kvadrata** (MNK) je opšte prihvaćen pristup za izravljanje geodetskih mreža. MNK ima za cilj da pronađe onaj set parametara (jedinствeno rešenje) koje minimalizuje sumu kvadrata popravaka (reziduala) merenja. Najčešći model primene metoda MNK jeste kroz model posrednog izravljanja. U okviru modela posrednog izravljanja svako merenje se modelira jednom funkcijom veze (modelom merenja) u funkciji od nepoznatih parametara. Ta funkcija se naziva funkcija veze, i može biti linearna i nelinearna. Međutim, u modelu posrednog izravljanja mogu postojati i druge funkcije nepoznatih parametara koje ne modeliraju konkretno merenje, već određena ograničenja koje parametri moraju da ispune.

Model posrednog izravnjanja – parametarski model

Rezultat izravnjanja jeste najbolja (optimalna) ocena nepoznatih parametara. Međutim, pored toga, algoritam izravnjanja nam pruža još dve veoma važne informacije: Kontrolu prisustva grubih i sistematskih grešaka u merenjima i statističku ocenu kvaliteta naših merenja, odnosno parametara (ocenu tačnosti). Prema tome, tri osnovna razloga, zbog kojih radimo izravnjanje su:

- 1. Da bi dobili najbolje ocene nepoznatih parametara.**
- 2. Da bi obezbedili pouzdanu kontrolu prisustva grubih i sistematskih grešaka.**
- 3. Da bi dobili ocenu stohastičkih osobina nepoznatih parametara i merenja – odnosno da bi dobili ocenu tačnosti.**

Model posrednog izravnjanja – Gaus-Markovljev model

Uobičajeni model posrednog izravnjanja jeste **Gaus-Markovljev model** – osnovni linearni statistički model kojim se matematički opisuje odnos između merenja, nepoznatih parametara i uticaja slučajnih grešaka merenja. Ovaj model predstavlja teorijsku osnovu metode najmanjih kvadrata u izravnjanju geodetskih mreža.

Gaus-Markovljev model sastoji se od **funkcionalnog** dela modela i **stohastičkog** dela modela. Funkcionalni deo modela povezuje opažanja sa nepoznatim parametrima linearnim jednačinama, dok stohastički deo modela opisuje stohastičke osobine merenja preko kovariacione matrice merenja.

Osnovna pretpostavka pri primeni ovog modela jeste da su greške merenja slučajne veličine čije je matematičko očekivanje jednako nuli $M(\varepsilon) = M(v) = 0$, što znači da su sistematske greške prethodno uklonjene, modelovane ili zanemarljive. Takođe se pretpostavlja da je kovariaciona matrica grešaka poznata. U tom slučaju Gaus-Markovljev model obezbeđuje najbolju linearnu nepristrasnu ocenu (**Best Linear Unbiased Estimator – BLUE**), što znači da je postignuto rešenje koje podrazumeva najmanju srednju kvadratnu grešku ocenjenih parametara. Ukoliko se pretpostavi da greške merenja slede normalnu raspodelu $\varepsilon \sim N(0, K)$ tada rešenje postaje i statistički optimalno (ekvivalentna **metodi maksimalne verodostojnosti**) odnosno, postignuto je rešenje (ocena parametara) koje: 1) ima minimalnu grešku; 2) ima nepristrasan karakter (odsustvo sistematskih uticaja); 3) efikasno – informacije iz merenja su najbolje iskorišćene; i 4) pouzdano – dobijaju se pouzdani intervali poverenja i statistički testovi.

Model posrednog izravnjanja – Funkcionalni model

Funkcionalni model definiše funkcionalnu – matematičku vezu između merenih veličina i nepoznatih parametara modela.

$$\hat{l} = l + v = F(\hat{X}) - \text{Opšti nelinearni funkcionalni model}$$

$$\hat{l} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \vdots \\ \hat{l}_n \end{pmatrix} \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad F(\hat{X}) = \begin{pmatrix} F_1(\hat{X}) \\ F_2(\hat{X}) \\ \vdots \\ F_n(\hat{X}) \end{pmatrix}$$

- $\hat{l}$ - Vektor izravnatih (ocenjenih) veličina
- l - Vektor merenih veličina
- v - Vektor popravaka merenih veličina
- $F(\hat{X})$ - Vektor nelinearnih matematičkih funkcija
- $\hat{X}$ - Vektor izravnatih (ocenjenih) parametara

Model posrednog izravnjanja – Funkcionalni model

$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \vdots \\ \hat{t} \end{pmatrix}$ Vektor ocenjenih vrednosti parametara

$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ t_0 \end{pmatrix}$ Vektor približnih vrednosti parametara

$\hat{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \vdots \\ dt \end{pmatrix}$ Vektor priraštaja parametara

$\hat{X} = X_0 + \hat{x} \quad \hat{l} = l + v = F(\hat{X})$

➔ $\hat{l}_i = l_i + v_i = F_i(\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{t}) = F_i(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots, t_0 + dt)$

Model posrednog izravnjanja – Funkcionalni model

Zbog praktičnih računskih razloga, opšti nelinearni oblik funkcija veze (modela merenja) se pretvara u linearni oblik razvojem funkcije veze (modela merenja) u Tejlorov red u okolini tačke približnih vrednosti nepoznatih parametara.

$$l_i + v_i = F_i(x_0, y_0, \dots, t_0) + \frac{\partial F_i}{\partial x_0} dx + \frac{\partial F_i}{\partial y_0} dy + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial t_0} dt$$

$$\Rightarrow v_i = a_i \cdot dx + b_i \cdot dy + \dots + u_i \cdot dt + f_i$$

Jednačina popravaka

Gde je:

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_0} \quad b_i = \frac{\partial F_i}{\partial y_0} \quad u_i = \frac{\partial F_i}{\partial t_0} \quad - \text{Parcijalni izvodi funkcije } F(\hat{X}) \text{ po nepoznatim parametrima}$$

$$f_i = F_i(x_0, y_0, \dots, t_0) - l_i \quad - \text{Slobodni članovi (približno – mereno)}$$

Model posrednog izravnjanja – Funkcionalni model

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \vdots \\ dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$



$$\hat{v} = A \cdot \hat{x} + f$$

Model posrednog izravnjanja – Funkcionalni model

Ukoliko merene veličine $l_1, l_2, \dots, l_n$ posmatramo kao slučajne promenljive koje slede normalnu raspodelu verovatnoća, možemo ih predstaviti kao:

$$l \sim N(\mu_l, K_l)$$

$$M(\varepsilon) = M(v) = 0 \quad \varepsilon \sim N(0, K)$$

gde je:

μ_l - vektor srednjih vrednosti l

K_l - kovarijaciona matrica merenih veličina.

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \quad K_l = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \dots & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_2 l_1} & \sigma_{l_2}^2 & \dots & \sigma_{l_2 l_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{l_n l_1} & \sigma_{l_n l_2} & \dots & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 Q_l$$

Model posrednog izravnjanja – Stohastički model

Pretpostavke koje se odnose na korelisanost opazanja

- Slučaj korelisanih opazanja različite preciznosti $K_l = \sigma_0^2 Q_l$
- Slučaj nekorelisanih opazanja različite preciznosti $K_l = \sigma_0^2 P_l^{-1}$

$$K_l = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & & & \\ & \sigma_{l_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \cdot P_l^{-1}$$

- Slučaj nekorelisanih opazanja iste preciznosti $P_l = E_l \Rightarrow K_l = \sigma_0^2 E_l$

Model posrednog izravnjanja – određivanje parametara

Metod najmanjih kvadrata predstavlja rešenje preodređenog sistema linearnih jednačina (jednačina veza) pod pretpostavkom stohastičkog modela, uz uslov minimizacije kvadratne forme:

$$v^T P_l v = \text{minimum}$$

$$\varphi = v^T \cdot P_l \cdot v = (Ax + f)^T P (Ax + f) = \text{minimum}$$

$$\varphi = x^T A^T P A x + x^T A^T P f + f^T P A x + f^T P f = \text{minimum}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x^T A^T P A + 2f^T P A = 0$$

$$(A^T P A) x + A^T P f = 0 \quad - \text{Sistem normalnih jednačina}$$

$$N = A^T P A \quad - \text{Matrica koeficijenata normalnih jednačina}$$

$$n = A \cdot P_l \cdot f \quad - \text{Matrica slobodnih članova normalnih jednačina}$$

Model posrednog izravnanja – određivanje parametara

$\hat{x} = -N^{-1} \cdot n = -Q_{\hat{x}} \cdot n$, - Vektor ocenjenih priraštaja nepoznatih parametara

$\hat{v} = A \cdot \hat{x} + f$ - Vektor ocenjenih popravaka merenja

$\hat{x} = x_0 + dx, \hat{y} = y_0 + dy, \hat{t} = t_0 + dt$ - Izravunate vrednosti nepoznatih parametara

$\hat{l}_i = l_i + \hat{v}_i$
 $\hat{l}_i = F_i(\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{t})$ } - Izravunate vrednosti merenih veličina

➡ $F_i(\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{t}) = l_i + \hat{v}_i$ - Kontrola izravnanja!!!

Ocene stohastičkih osobina parametara i merenih veličina nakon izravnjanja

Kofaktorska matrica izravnatih parametara

$$Q_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1}$$

Kofaktorska matrica izravnatih opažanja

$$Q_{\hat{\ell}} = A(A^T P A)^{-1} A^T$$

Kofaktorska matrica reziduala

$$Q_v = Q_{\ell} - A(A^T P A)^{-1} A^T$$

gde je:

A - prva matrica dizajna

P - matrica težina opažanja

$$P = Q_{\ell}^{-1}$$

Ocene stohastičkih osobina parametara i merenih veličina nakon izravnjanja

Kovariaciona matrica nepoznatih parametara:

$$K_{\hat{x}} = s_0^2 (A^T P A)^{-1}$$

Kovariaciona matrica izravnatih merenja:

$$K_{\hat{\ell}} = s_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T$$

Kovariaciona matrica reziduala:

$$K_v = s_0^2 Q_{\ell} - s_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T$$

gde je:

$$s_0^2 = \frac{v^T P_v}{n - u}$$

a posteriori faktor varijanse jedinične težine.

gde je:

$n - u$ - redundantnost sistema

n - broj parametarskih jednačina

u - broj nezavisnih parametara

P - matrica težina

Globalni test adekvatnosti modela

Globalni test je statistički test kojim se proverava statistička adekvatnost funkcionalnog i stohastičkog modela.

$$\begin{array}{l} H_0 : M(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2 \\ H_a : M(\hat{\sigma}_0^2) \neq \sigma_0^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha}(f, \infty)$$

Razloge ne prolaženja testa adekvatnosti modela treba tražiti u:

- Postojanje nemodelovanih sistematskih uticaja (neadekvatnost funkcionalnog modela)
- Postojanje grubih grešaka u merenju
- Neadekvatne pretpostavke o preciznosti merenja (neadekvatnost stohastičkog modela)

Lokalni test na grube greške – data-snooping test

- Lokalna test statistika za grube greške merenih veličina (*data-snooping* test):
 - kada nije prihvaćena nulta hipoteza, neophodno je ispitati razloge njenog neprihvatanja odnosno, proveriti da li postoje grube greške, da li je uzeta odgovarajuća tačnost opažanja i odgovarajući funkcionalni model opažanja
 - najpre se identifikuju eventualne grube greške u pojedinim merenim veličinama

$H_0 : \nabla_i = 0$ - nulta hipoteza

$H_a : \nabla_i \neq 0$ - alternativna hipoteza

$$\omega_i = \frac{|\hat{v}_i|}{\sigma_{v_i}} = \frac{|\hat{v}_i|}{\sigma_o \sqrt{Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}}} = \frac{|\hat{v}_i|}{\sigma_{l_i} \cdot \sqrt{r_{ii}}} \sim N(0,1) \text{ - test statistika}$$

□ Test odluka:

$|\omega_i| \leq t_{1-\alpha/2}, \longrightarrow$ Prihvata se nulta hipoteza sa verovatnoćom $1 - \alpha$

$|\omega_i| \geq t_{1-\alpha/2}, \longrightarrow$ Prihvata se alternativna hipoteza (merena veličina je opterećena grubom greškom)

Mere kvaliteta geodetske mreže

Geodetske mreže su važne za realizaciju svih geodetskih zadataka u inženjerstvu. One se projektuju, tako da ispunjavaju određene mere kvaliteta. Na osnovu definisanih zahteva konačnih geodetskih radova, mogu se proračunati vrednosti maksimalnih dozvoljenih grešaka geodetske mreže.

Na primer, zahtev se može odnositi na pozicioniranje tačke u koordinatnom sistemu sa preciznošću od $\sigma_p = \pm 5mm$
Na preciznost obeležavanja utiču:

1. Preciznost geodetske mreže – nesigurnost položaja geodetske mreže direktno se odražava na nesigurnost obeležene tačke.
 2. Postupak obeležavanja - preciznost odmeranja u odnosu na tačke geodetske mreže.
 3. Preciznost markiranja tačke na terenu.
-

Zahtev se može odnositi na relativni odnos između dve obeležene tačke, koje se obeležavaju sa različitih delova mreže, mora biti određen sa određenom preciznošću. U tom smislu postavlja se pitanje kako se relativni odnos između tačaka geodetske mreže odražava na relativni odnos obeleženih tačaka. Tačnije, relativni odnos između tačaka geodetske mreže mora biti određen sa određenim kvalitetom. Takav primer je karakterističan za linijske objekte.

Mere kvaliteta geodetske mreže

Mere kvaliteta geodetske mreže mogu se podeliti na:

1. Mere preciznosti
 2. Mere pouzdanosi
-

Mere preciznosti geodetskih mreža predstavljaju kvantitativne pokazatelje statističkog kvaliteta ocena nepoznatih parametara, merenih veličina i ocenljivih funkcija nepoznatih parametara. Mere preciznosti nam pružaju informaciju o nesigurnosti naših ocena izazvanih neizbežnim prisustvom slučajnih grešaka.

Mere pouzdanosti geodetskih mreža predstavljaju kvantitativne pokazatelje kvaliteta geodetske mreže sobzirom na mogućnost otkrivanja grubih grešaka u merenjima (*unutrašnja pouzdanost*) i s obzirom na uticaj neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (*spoljašnja pouzdanost*)

Mere kvaliteta geodetske mreže

Apsolutne mere preciznosti:

- Standardne greške položaja tačaka mreže
- Apsolutne elipse grešaka tačaka mreže (Izotropnost i homogenost mreže)

Relativne mere preciznosti:

- Relativne elipse grešaka
- Greške funkcija (dužine ili visinske razlike)

Specifične mere:

- Osetljivost geodetske mreže

Mere preciznosti geodetskih mreža

Mere preciznosti geodetskih mreža predstavljaju kvantitativne pokazatelje statističkog kvaliteta ocena nepoznatih parametara, merenih veličina i ocenljivih funkcija nepoznatih parametara. Mere preciznosti nam pružaju informaciju o nesigurnosti naših ocena izazvanih neizbežnim prisustvom slučajnih grešaka.

Osnovni izvor informacija o preciznosti geodetske mreže direktno proizilaze iz ocena stohastičkih osobina nepoznatih parametara i merenih veličina, tačnije iz:

Kovariaciona matrica nepoznatih parametara: $K_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}$

Kovariaciona matrica izravnatih merenja: $K_{\hat{l}} = \sigma_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T = \sigma_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T$

Kovariaciona matrica reziduala: $K_v = \sigma_0^2 Q_l - \sigma_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T$

gde je s_0^2 ocena srednje kvadratne greške jedinice težine: $\sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{n - u}$

Mere preciznosti geodetskih mreža

Osnovne mere preciznosti geodetskih mreža su standardne greške položaja tačaka, koje se obično prikazuju kao standardne greške koordinatnih osa.

$$\sigma_{\hat{X}_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i}}; \quad \sigma_{\hat{Y}_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i}}; \quad \sigma_{\hat{Z}_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{Z}_i \hat{Z}_i}}$$

Standardna greška položaja:

$$\sigma_{p_i} = \sqrt{\sigma_{\hat{X}_i}^2 + \sigma_{\hat{Y}_i}^2 + \sigma_{\hat{Z}_i}^2} = \sqrt{\sigma_0^2 (Q_{\hat{X}_i \hat{X}_i} + Q_{\hat{Y}_i \hat{Y}_i} + Q_{\hat{Z}_i \hat{Z}_i})}$$

Kriterijumi kvaliteta koje geodetska mreža treba da ispuni često se daju vezano za određeni stepen verovatnoće. Ocene standardnih grešaka ocenjenih koordinata, uz ocene koordinata mogu da formiraju interval poverenja za usvojeni nivo verovatnoće. Imajući u vidu pretpostavku o standardnoj normalnoj raspodeli ocene nepoznatih, i standardizovane intervale 1σ (68%), 2σ (95%) i 3σ (99.8%), mogu se formirati karakteristični intervali nesigurnosti:

$$\hat{x} - \hat{\sigma}_x \cdot t_{1-\alpha/2} \leq \hat{x} \leq \hat{x} + \hat{\sigma}_x \cdot t_{1-\alpha/2}$$

gde $t_{1-\alpha/2}$ predstavlja kvantil normalne (ili studentove) raspodele za usvojeni stepen verovatnoće.

Mere preciznosti geodetskih mreža

Druga standardna mera preciznosti geodetskih mreža su **Apsolutne elipse grešaka**.

Sobzirom da se položaj neke tačke u 2D koordinatnom sistemu određen sa ocenom dve koordinate (x,y) .

Stepen nesigurnosti ocene položaja u pravcu koordinatnih osa dat je standardnim greškama koordinata.

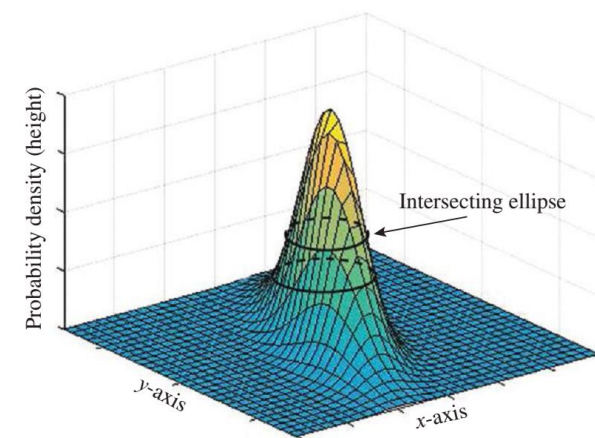
Međutim, stepen korelisanosti ocena koordinata, daje nam informaciju nesigurnosti ocene položaja i u drugim pravcima (različitim od koordinatnih osa). Tako na primer, moguće je dobiti veći stepen nesigurnosti ocene položaja tačke u pravcu koji se ne poklapa sa koordinatnim osama.

Mere preciznosti geodetskih mreža

Funkcija gustine raspodele za n -dimenzionalnu promenljivu može se napisati kao:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(K)}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T K^{-1}(X-\mu)}$$

gde je X vektor izmerenih vrednosti posmatranih veličina, K je $n \times n$ kovarijaciona matrica vektora posmatranih veličina, μ je vektor stvarnih vrednosti posmatranih veličina, n je broj posmatranih veličina koji se razmatra, $(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Sigma)}$ je normalizaciona konstanta koja obezbeđuje da zapremina ispod funkcije gustine verovatnoće multivarijantne normalne raspodele bude jednaka jedinici, a $\det(K)$ je determinanta kovarijacione matrice K .



Kada ravan paralelna x, y koordinatnoj ravni preseče površ gustine na određenoj visini, formira se elipsa preseka. Formirana elipsa predstavlja izoliniju (konturu) konstantne gustine verovatnoće; niz elipsi (ili kontura) odgovara različitim visinama funkcije gustine verovatnoće. Tako dobijene konture predstavljaju linije iste „visine“ (iste verovatnoće) analogno izohipsama na topografskoj karti. Jednačina elipse preseka u dvodimenzionalnom (bivarijantnom) slučaju dobija se postavljanjem uslova da eksponent u funkciji gustine iz jednačine bude konstanta (k^2). Ovaj eksponent, koji predstavlja familiju elipsi greške centriranih u srednjim vrednostima promenljivih:

$$k^2 = (X - \mu)^T K^{-1} (X - \mu)$$

Mere preciznosti geodetskih mreža

Verovatnoća $1 - \alpha$ da vrednosti vektora X upadnu u određeni prostorni interval elipse može se prikazati kao:

$$P\left\{(X - \mu)^T K^{-1}(X - \mu) < \chi_{df=n, 1-\alpha}^2\right\} = 1 - \alpha$$

gde je α nivo značajnosti (koji predstavlja površinu donjeg repa hi-kvadrat raspodele), df je broj stepeni slobode, n je broj promenljivih, a $\chi_{df=n, 1-\alpha}^2$ je vrednost hi-kvadrat raspodele za dati nivo značajnosti α .

Uzimajući u obzir činjenicu da varijanse n promenljivih mogu biti različite i da mogu biti međusobno korelisane. Vrednosti vektora X koje daju konstantnu vrednost gustine verovatnoće formiraju elipsoide sa centrom u μ . Za dvodimenzionalni slučaj, jednačina daje elipsu koja je centrirana u tački koja odgovara srednjim vrednostima (μ_x, μ_y) posmatranih veličina X . Za dvodimenzionalnu raspodelu, na primer, funkcija $f(X)$ predstavlja površ gustine verovatnoće čiji je ukupni zapreminski integral ograničen površinom i $x - y$ ravni jednak jedinici.

Mere preciznosti geodetskih mreža

Jedna elipsa grešaka se može predstaviti kao:

$$\left(\frac{x - \mu_x}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_y}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 = k^2$$

gde su λ_1 i λ_2 sopstvene vrednosti kovariacione matrice.

što se može dovesti u vezu sa standardnom jednačinom elipse sa centrom u koordinatnom početku ($u = 0, v = 0$):

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

gde u i v predstavljaju pravce sopstvenih vektora, a poluvelika osa a i polumala osa b elipse su:

$$a = k\sqrt{\lambda_1}, b = k\sqrt{\lambda_2}$$

gde je k faktor razmere elipse koji odgovara izabranom nivou poverenja. Iz jednačine (7.40), granična vrednost za k može se dobiti kao:

$$k = \sqrt{\chi_{df=n, 1-\alpha}}$$

Mere preciznosti geodetskih mreža

U slučaju kada vektor stvarnih vrednosti μ i odgovarajuća matrica kovarijanse K nisu poznati, mogu se koristiti ocenjene vrednosti $\bar{X}$ i ocenjena kovarijaciona matrica Kx :

$$k^2 = (X - \bar{X})^T K x^{-1} (X - \bar{X})$$

Sve vrednosti vektora X koje zadovoljavaju ovu jednačinu definišu elipsu čije su ose u pravcima sopstvenih vektora matrice K , dok su dužine osa određene kvadratnim korenima odgovarajućih sopstvenih vrednosti. Ako su veličine u ovoj jednačini:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

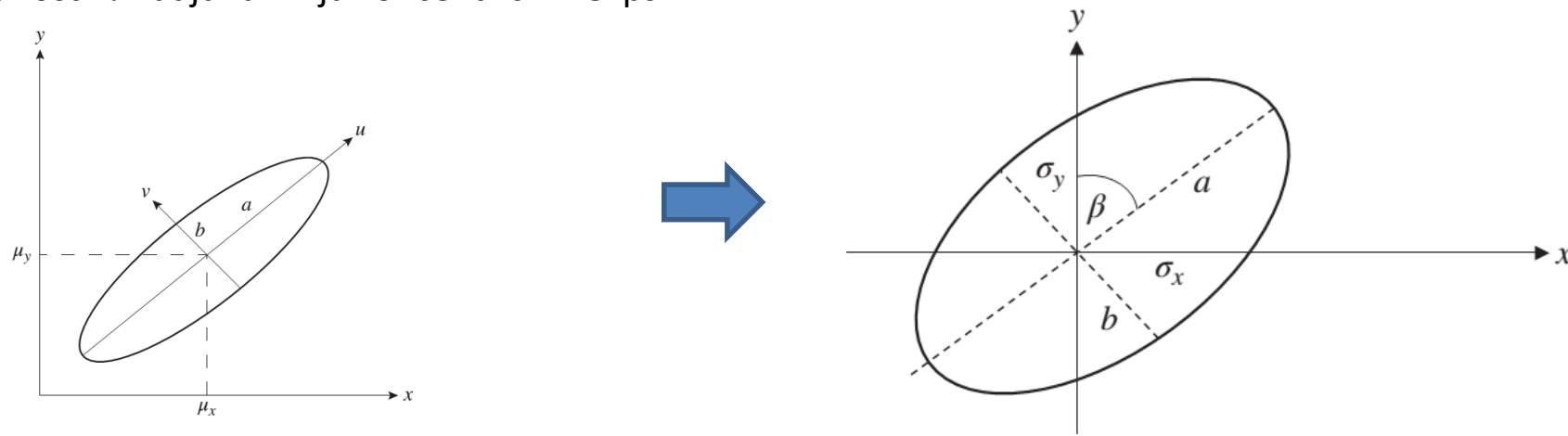
tada su λ_1 i λ_2 sopstvene vrednosti matrice kovarijanse K (nakon dijagonalizacije), pa se jednačina može zapisati kao:

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{(\sqrt{\lambda_1})^2} + \frac{(y - \bar{y})^2}{(\sqrt{\lambda_2})^2} = k^2$$

što predstavlja jednačinu dvodimenzionalne elipse sa centrom u tački $(\bar{x}, \bar{y})$, gde su poluvelika i polumala osa definisane jednačinama. Ovde je α nivo značajnosti, a $df = 2$ broj stepeni slobode za dvodimenzionalni slučaj.

Mere preciznosti geodetskih mreža

Slika predstavlja liniju nivoa (izoliniju gustine) koja označava skup tačaka za koje vrednosti x i y daju istu vrednost funkcije gustine $f(X)$, definisanu konstantom k . Ova linija je data za fiksnu vrednost k , što znači konstantnu verovatnoću, i centrirana je u $(\bar{x}, \bar{y})$. Različite vrednosti k^2 daju familiju koncentričnih elipsi.



$$A_i = \sqrt{(\lambda_1)_i \cdot F_{1-\alpha;2;f}}; \quad B_i = \sqrt{(\lambda_2)_i \cdot F_{1-\alpha;2;f}}; \quad \theta_i = \arctg \frac{(\lambda_1)_i - K_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i}}{K_{\tilde{y}_i \tilde{x}_i}}$$

$$\det(K_{\tilde{x}_k} - \lambda E_k) = 0$$

$$(\lambda_{1/2})_i = \frac{1}{2} \left(K_{\hat{y}_i \hat{y}_i} + K_{\hat{x}_i \hat{x}_i} \pm \sqrt{(K_{\hat{x}_i \hat{x}_i} - K_{\hat{y}_i \hat{y}_i})^2 + 4K_{\hat{y}_i \hat{x}_i}^2} \right)$$

Mere preciznosti geodetskih mreža

Računanje elemenata elipse grešaka: 1) Velika poluosa; 2) Mala poluosa; i 3) Orijentacija elipse.

$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{y}} \\ Q_{\hat{y}\hat{x}} & Q_{\hat{y}\hat{y}} \end{bmatrix}$ - submatrica kofaktorske matrice ocenjenih vrednosti nepoznatih parametara koja se odnosi na jednu tačku

$$\det(Q_{\hat{x}} - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} (Q_{\hat{x}\hat{x}} - \lambda) & Q_{\hat{x}\hat{y}} \\ Q_{\hat{y}\hat{x}} & (Q_{\hat{y}\hat{y}} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

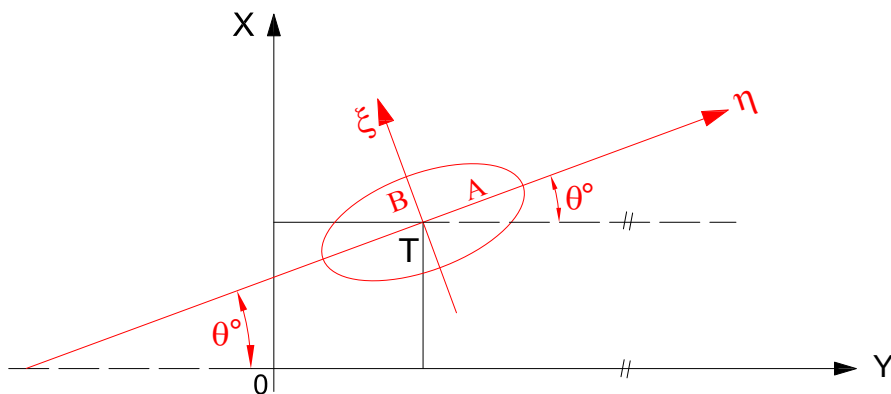
$$\lambda^2 - (Q_{\hat{x}\hat{x}} + Q_{\hat{y}\hat{y}})\lambda + Q_{\hat{x}\hat{x}}Q_{\hat{y}\hat{y}} - Q_{\hat{x}\hat{y}}^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(Q_{\hat{x}\hat{x}} + Q_{\hat{y}\hat{y}} + k) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(Q_{\hat{x}\hat{x}} + Q_{\hat{y}\hat{y}} - k) \quad k = \sqrt{(Q_{\hat{x}\hat{x}} - Q_{\hat{y}\hat{y}})^2 + 4Q_{\hat{x}\hat{y}}^2}$$

$A = s_0 \sqrt{\lambda_1} = s_0 \sqrt{\lambda_A} = s_0 \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{\hat{x}\hat{x}} + Q_{\hat{y}\hat{y}} + k)}$ - dužina velike poluose standardne elipse grešaka posmatrane tačke

$B = s_0 \sqrt{\lambda_2} = s_0 \sqrt{\lambda_B} = s_0 \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{\hat{x}\hat{x}} + Q_{\hat{y}\hat{y}} - k)}$ - dužina male poluose standardne elipse grešaka posmatrane tačke

$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{\hat{x}\hat{y}}}{Q_{\hat{x}\hat{x}} - Q_{\hat{y}\hat{y}}}$ - ugao koji gradi velika poluosa standardne elipse grešaka sa X-osom koordinatnog sistema



Apsolutne elipse grešaka

Elipse grešaka se obično vezuju za usvojeni nivo verovatnoće. Prema tome, elementi elipse grešaka za usvojeni nivo verovatnoće, računaju se kao:

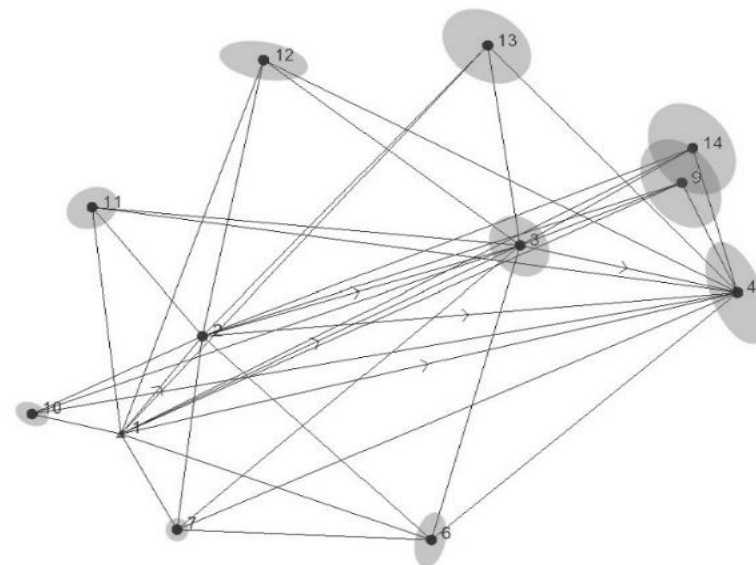
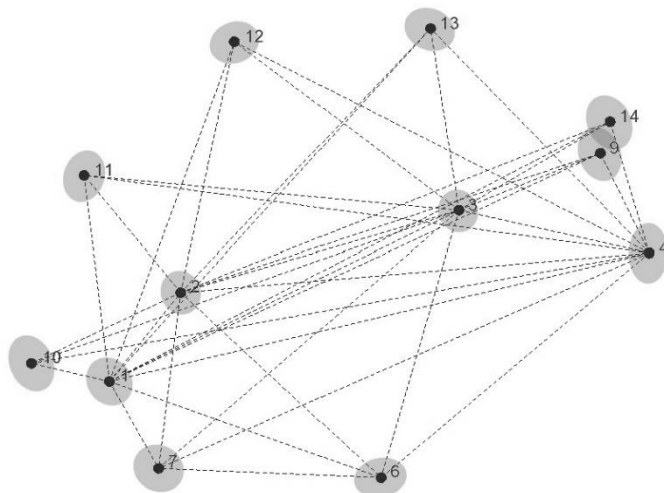
$$A_F = s_0 \sqrt{2\lambda_A \cdot F_{1-\alpha, 2, r}} = A \sqrt{2F_{1-\alpha, 2, r}} \quad \text{- dužina velike poluose elipse poverenja posmatrane tačke za verovatnoću } 1-\alpha$$

$$B_F = s_0 \sqrt{2\lambda_B \cdot F_{1-\alpha, 2, r}} = B \sqrt{2F_{1-\alpha, 2, r}} \quad \text{- dužina male poluose elipse poverenja posmatrane tačke za verovatnoću } 1-\alpha$$

$$\theta_F = \theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{\hat{x}\hat{y}}}{Q_{\hat{x}\hat{x}} - Q_{\hat{y}\hat{y}}} \quad \text{- ugao koji gradi velika poluosa elipse poverenja za verovatnoću } 1-\alpha \quad \text{sa X-osom koordinatnog sistema}$$

Apsolutne elipse grešaka

Apsolutne elipse grešaka nam daju vizuelni uvid prostornu nesigurnost ocene položaja tačaka mreže, a pored toga prikaz geodetske mreže sa elipsama grešaka može nam dati uvid u zone mreže gde je veća ili manja nesigurnost.



Na mere apsolutne preciznosti geodetskih mreža utiču nam:

1. Geometrija mreže
2. Preciznost merenja
3. Datum geodetske mreže

Relativne elipse grešaka

Relativne elipse grešaka je mera preciznosti geodetskih mreža koja ilustruje odnos dve tačke u pogledu preciznosti

Razlike koordinata tačaka dobijenih iz izravnjanja mogu se izraziti kao:

$$\Delta \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_j - \hat{x}_i \\ \hat{y}_j - \hat{y}_i \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

Sa kovariacionom matricom:

$$\mathbf{K}_{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}_{ij}^T = s_o^2 \cdot \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}_{ij}^T = s_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}_{ij}^T = \begin{pmatrix} Q_{\Delta x \Delta x} & Q_{\Delta x \Delta y} \\ Q_{\Delta y \Delta x} & Q_{\Delta y \Delta y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} Q_{x_i x_i} + Q_{x_j x_j} - Q_{x_i x_j} - Q_{x_j x_i} & Q_{x_i y_i} + Q_{x_j y_j} - Q_{x_i y_j} - Q_{x_j y_i} \\ Q_{y_i x_i} + Q_{y_j x_j} - Q_{y_i x_j} - Q_{y_j x_i} & Q_{y_i y_i} + Q_{y_j y_j} - Q_{y_i y_j} - Q_{y_j y_i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & \cdots & Q_{x_i x_j} & Q_{x_i y_j} & \cdots \\ & Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & & Q_{y_i x_j} & Q_{y_i y_j} & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & Q_{x_j x_i} & Q_{x_j y_i} & & Q_{x_j x_j} & Q_{x_j y_j} & \\ \cdots & Q_{y_j x_i} & Q_{y_j y_i} & \cdots & Q_{y_j x_j} & Q_{y_j y_j} & \cdots \\ & \vdots & & & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & & & i & & j & & u & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relativne elipse grešaka

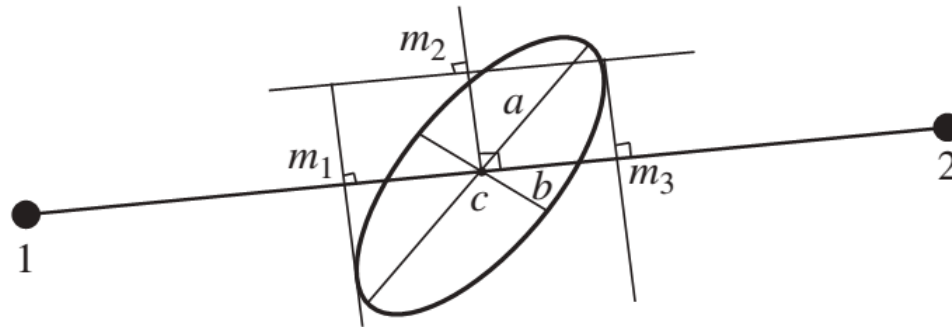
Računanje elemenata relativnih elipsi grešaka elipse grešaka: 1) Velika poluosa; 2) Mala poluosa; i 3) Orijentacija elipse.

$$A_R = s_o \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} + k_R)}$$

$$B_R = s_o \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} - k_R)}$$

$$\theta_R = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{\Delta x \Delta y}}{Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y}}$$

$$k_R = \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2}$$



Pokazatelji osetljivosti geodetskih mreža za osmatranje

Pokazatelji **osetljivosti** geodetskih mreža su karakteristična mera preciznosti kontrolnih mreža i odnose se na **intenzitet najmanjeg vektora pomeranja** koji se primenom testova podudarnosti mreža **može otkriti** za određeni nivo značajnosti α i moć testa $1-\beta$ (енг. **minimal detectable deformation**).

Ako razliku koordinata i odgovarajuću kofaktorsku matricu razlika predstavimo sa:

$$H_0 : M(\hat{d}) = 0 \quad \text{против} \quad H_a : M(\hat{d}) \neq 0$$

$$\hat{d} = \hat{X}_2 - \hat{X}_1 \quad Q_{\hat{d}} = Q_{\hat{X}_1} + Q_{\hat{X}_2}$$

$$T|_{H_0} = \frac{\hat{d}^T Q_{\hat{d}}^+ \hat{d} / h}{\hat{\sigma}_0^2 / f} |_{H_0} \sim F_{h, f, \lambda} \quad f = f_1 + f_2 \quad h = \text{rang}(Q_{\hat{d}})$$

$$T|_{H_0} = \frac{\hat{d}^T Q_{\hat{d}}^+ \hat{d} / h}{\hat{\sigma}_0^2 / f} |_{H_0} \sim F_{h, f, \lambda} \quad \lambda = \frac{d^T Q_d^+ d}{\sigma_0^2} \quad \lambda_0 = f(h, f, \alpha_0, \beta_0)$$

Pokazatelji osetljivosti geodetskih mreža za osmatranje

Vektor pomeranja d može se izraziti kao:

$$d = a \cdot g$$

gde a predstavlja intenzitet, a g jedinični vektor.

$$\text{1D: } \lambda = \frac{d_p^2 Q_d^{-1}}{\sigma_0^2} \qquad \text{2D: } \lambda = \frac{d_p^2 \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} Q_d^{-1} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}}{\sigma_0^2}$$

Ako želimo da izračunamo minimalnu vrednost vektora izteziteta koristićemo teorijsku vrednost parametra necentralnosti:

$$a_{\min} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_0}{g^T Q_d^+ g}}$$

Pokazatelji osetljivosti geodetskih mreža za osmatranje

Граничне вредности параметра нецентралности λ_0 за усвојени ниво значајности $\alpha_0 = 0.05$, моћ теста $1 - \beta_0 = 0.80$ и $1 \leq h \leq 30$, $2 \leq f \leq \infty$ приказане су у табели:

f	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 5$	$h = 10$	$h = 20$	$h = 30$
2	32.0	62.3	92.7	153.4	305.3	608.9	912.4
5	12.4	18.7	24.5	35.7	62.9	116.8	170.5
10	9.7	13.2	16.2	21.7	34.5	59.1	83.4
20	8.7	11.2	13.3	16.8	24.4	38.4	51.9
30	8.4	10.7	12.4	15.4	21.5	32.3	42.5
50	8.2	10.2	11.8	14.3	19.3	27.7	35.2
100	8.0	9.9	11.3	13.6	17.8	24.3	29.9
∞	7.9	9.6	10.9	12.8	16.2	21.0	24.6

Mere pouzdanosti geodetske mreže

- Pouzdanost geodetske mreže predstavlja kvalitet predloženog rešenja (geometrije mreže i merenja u mreži) s obzirom na mogućnost otkrivanja grubih grešaka u merenjima (**unutrašnja pouzdanost**) i s obzirom na uticaj neotkrivenih grubih grešaka na ocene traženih veličina (**spoljašnja pouzdanost**)
- Postoje **globalne** i **lokalne** mere pouzdanosti - globalne se odnose na mogućnost utvrđivanja postojanja grubih grešaka bez mogućnosti njihovog lociranja, dok se lokalne odnose na verovatnoću otkrivanja rezultata koji sadrže grube greške

$$R = Q_{\hat{v}} Q_l^{-1} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow r_{ii} = Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i} Q_l^{-1} = Q_{\hat{v}_i \hat{v}_i} P_i$$

• mera lokalne unutrašnje pouzdanosti, tzv. lokalni broj stepeni slobode

- Faktor r_{ii} predstavlja uticaj grube greške i-tog opažanja na i-tu popravku, stoga je verovatnoća otkrivanja grube greške u i-tom opažanju veća ukoliko je pomenuti faktor veći; merenja čiji je r_{ii} faktor manji od 0.3 smatraju se nepouzdanim (faktor r_{ii} uzima vrednosti između 0 i 1).

Datum geodetskih mreža

- **Datum geodetske mreže** određuje **položaj (oblik i veličinu)** geodetske mreže u referentnom koordinatnom sistemu.
- Datum geodetske mreže definiše se **datumskim parametrima** (sedam parametara za 3D geodetsku mrežu: t_x , t_y , t_z , r_x , r_y , r_z i s)
- Neki od parametara mogu se odrediti iz određenog tipa merenja (npr. mereni azimut definiše rotaciju r_z , dok merenja dužina definiše razmeru)
- U slučaju 1D kontrolne mreže, gde su merene visinske razlike, parametar translacije ostaje neodređen.

Datum geodetskih mreža

Врсте опажања	Параметри датума						
	Транслације			Ротације			Размера
	t_X	t_Y	t_Z	r_X	r_Y	r_Z	s
Дужине	x	x	x	x	x	x	✓
Хоризонтални правци	x	x	x	x	x	x	x
Хоризонтални углови	x	x	x	x	x	x	x
Азимути	x	x	x	x	x	✓	x
Зенитна одстојања	x	x	x	✓	✓	x	x
GNSS 2D вектори	x	x	x	x	x	✓	✓
GNSS 3D вектори	x	x	x	✓	✓	✓	✓
Висинске разлике	x	x	x	✓	✓	x	✓

Datum geodetskih mreža

Problem datuma geodetske mreže prouzrokovao je pojavom linearno zavisnih kolona u matrici dizajna funkcionalnog modela „A“

Tada je $r(A) = r < u$

gde veličina $r(A)$ predstavlja rang funkcionalnog modela, odnosno rang matrica A .

veličina $d=u-r$ predstavlja defekt funkcionalnog modela.

Kada je $d>0$ postoji **problem datuma geodetske mreže**, odnosno ne postoji jedinstvena matrica N^{-1} (**regularna inverzija**) koja daje jedinstveno rešenje normalnih jednačina po metodi najmanjih kvadrata
 $x = N^{-1} \times n$

Datum geodetskih mreža

Kod slobodnih geodetskih mreža matrica N je singularna (ne može se sprovesti regularna inverzija).

U tom slučaju govorimo o postupku pseudoinverzije pri iznalaženju rešenja singulariteta matrice N

Za matricu N postoji jedinstvena matrica N^+ za koju važi:

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(A^+A)^T = A^+A$$

$$(AA^+)^T = AA^+$$

pri čemu je $r(A^+) = r(A)$,

koja se naziva **pseudoinverzijom matrice N**

Datum geodetskih mreža

Najčešći metod rešavanja problema pseudoinverzije je **metod ortogonalnog ovičenja**:

$$N^- = (N + RR^T)^{-1}N(N + RR^T)^{-1} = Q_{\tilde{x}}$$

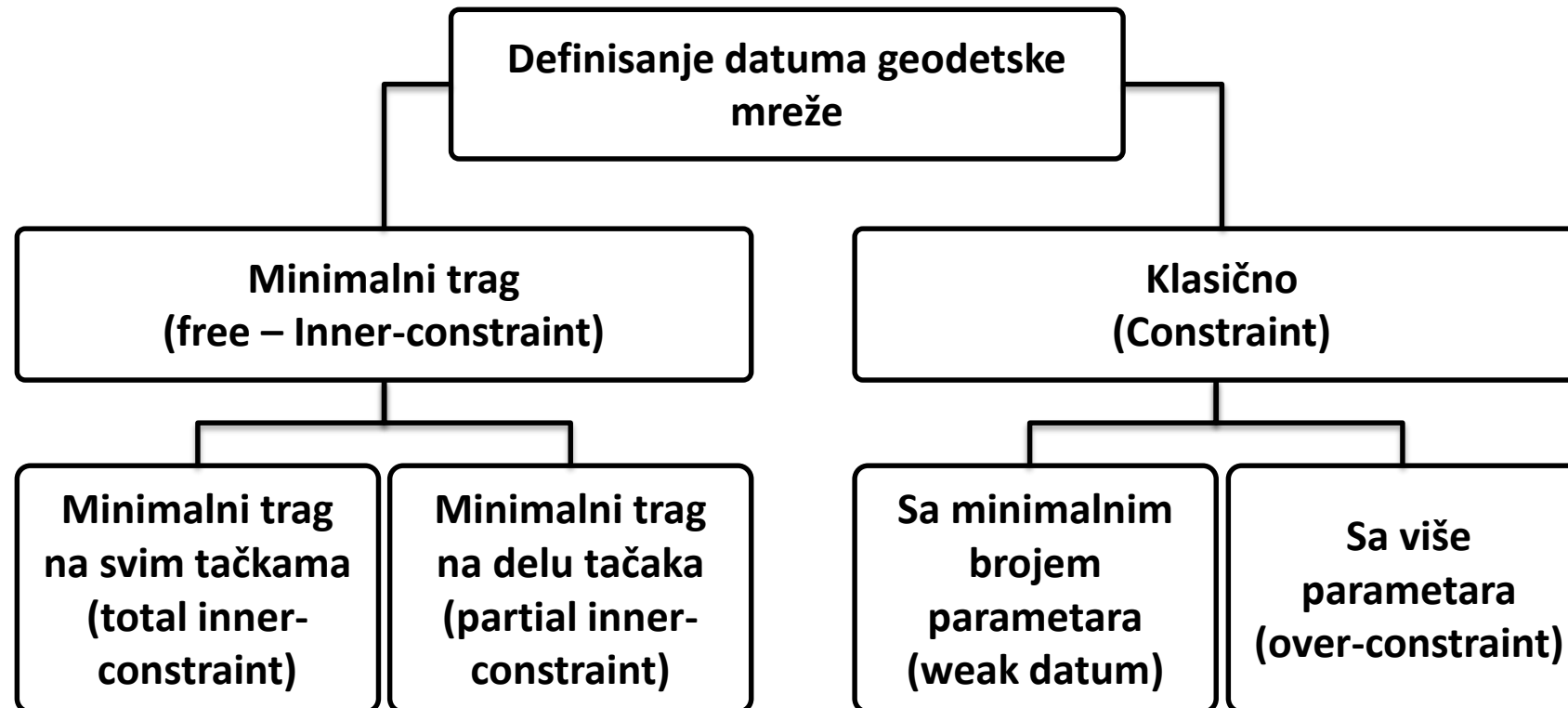
$$(R^-)^T = (N + RR^T)^{-1}R$$

Koja se sprovodi proširenjem matrice N matricom datumskih uslova R:

$$\begin{bmatrix} N & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^- & R^{-T} \\ R^- & 0 \end{bmatrix}$$

gde se matrica datumskih uslova može definisati na dva načina: **klasično i minimalnim tragom matrice Qx**

Datum geodetskih mreža



Izravnanja geodetskih mreža kod kojih datum nije definisan i pri kojima se problem datuma minimalnim tragom (na delu ili na svim tačkama) nazivaju se slobodna izravnanja mreže (free net adjustments), dok se izravnanja kod kojih se primenjuju minimalna ograničenja nazivaju minimalno ograničena izravnanja (minimally constrained adjustments).

Datum geodetskih mreža

- **Nedostatak definicije datuma geodetskih mreža prouzrokuje defekt funkcionalnog modela (nemogućnost rešenja zbog singulariteta matrice normalnih jednačina)**
- **Defekt funkcionalnog modela određuje minimalni broj datumskih parametara koje je potrebno definisati (kod 1D geodetskih mreža je $d=1$)**
- **Klasično** (Constraint) definisanje datuma podrazumeva fiksiranje određenih parametara - koordinata (isključivanje iz funkcionalnog modela)
- **Definisanje datuma minimalnim tragom** podrazumeva uvođenje **matrice datumskih uslova**, kojima se definiše minimalni broj datumskih uslova, koji za posledicu ima minimalnu normu vektora priraštaja, odnosno **minimalni trag matrice Qx** (za tačke koje učestvuju u definisanju datuma).

Minimalni trag matrice Q_x - Ograničenje razmere

Kod slobodnog izravnjanja visinske mreže (1D sistem) postoji jedan datumski defekt, pa je zbog toga potrebno jedno poziciono ograničenje, koje se izvodi iz uslova da centroid ostane nepromenjen.

Kod slobodnog izravnjanja 2D mreže (mereni pravci i dužine) postoje tri datumski defekta, pa su potrebna dva poziciona ograničenja i jedno rotaciono ograničenje. Ona se izvode iz uslova da centroid ostane nepromenjen i da srednji pravac od centroida ka svim tačkama ostane nepromenjen.

Za 3D mreže (mereni horizontalni pravci, zenitni uglovi i dužine) postoji šest datumskih defekata, što zahteva tri poziciona i tri rotaciona ograničenja. Ponovo, ova ograničenja se izvode iz uslova da centroid ostane nepromenjen i da srednji pravac (u prostoru) od centroida ka svim tačkama ostane nepromenjen.

Kod 2D i 3D mreža bez merenih dužina potrebno je dodatno ograničenje razmere, koje se može izvesti iz uslova da srednje rastojanje od centroida do svih tačaka ostane nepromenjeno.

Datum geodetskih mreža – veličine koje (ne) zavise od datuma

- Ocena nepoznatih parametara i pripadajuće kovariacione matrice je zavisn od datuma.
- Kod datuma definisanog minimalnim tragom, geometrija mreže ostaje nepromenjena
- Klasično definisan datum (u over-constraint slučaju) utiče na izmenu geometrije mreže, u zavisnosti od kvaliteta međusobnih odnosa tačaka.
- **Ocene deformacija su izrazito zavisne od izbora datuma!**

Datum geodetskih mreža – Klasično definisan datum

Na primeru trodimenzionalne mreže u kojoj su mereni horizontalni pravci, zenitna odstojanja i kose dužine, ostaje 4 nedefinisana datumska parametra:
translacije duž koordinatnih osa i rotacija oko Z ose.

Translacija se definiše fiksiranjem koordinata jedne tačke (tačke 1), dok se rotacija oko Z ose definiše fiksiranjem x koordinate druge tačke (tačke 2):

$$\Delta x_1 = 0, \quad \Delta y_1 = 0, \quad \Delta z_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 0,$$

Matrično napisano, datumski uslovi se mogu napisati na sledeći način:

$$B^T x = 0 \quad B^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & & X_m & Y_m & Z_m & z_1 & \dots & z_p \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Datum geodetskih mreža – Klasično definisan datum

Kada se datumska ograničenje uvedu u funkcionalni model, dobija se:

$$V = Ax + f$$

$$B^T x = 0$$

što se može predstaviti u matričnom obliku kao:

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Iz proširene matrice normalnih jednačina, primenom regularne inverzije dobija se:

$$N^- = Q_{\hat{x}} = \left(N + BB^T \right)^{-1} N \left(N + BB^T \right)^{-1}$$

Datum geodetskih mreža - minimalni trag matrice Q_x

Trag matrice Q_x predstavlja sumu elemenata na dijagonali koji predstavljaju skalirane vrednosti varijansi nepoznatih parametara.

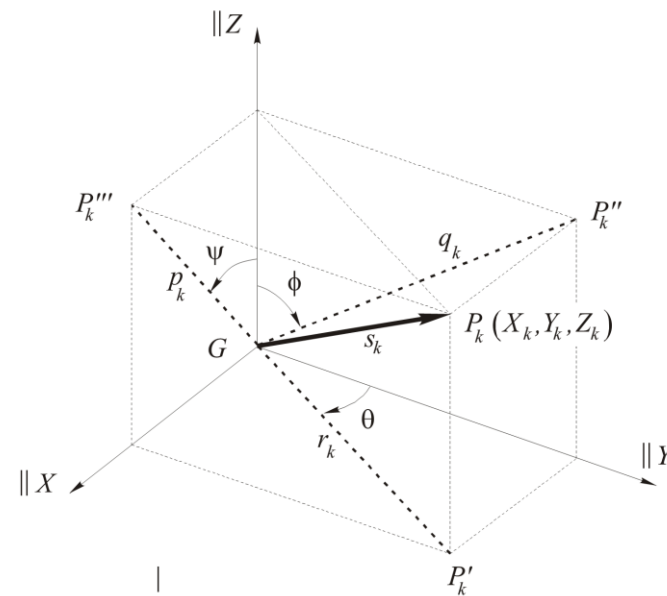
U formi rešenja ortogonalnim ovičenjem uslov minimizacije traga matrice Q_x može se napisati kao:

$$trQ_{\hat{x}} = tr \left(N + RR^T \right)^{-1} N \left(N + RR^T \right)^{-1} = \min$$

Datum geodetskih mreža - minimalni trag matrice Q_x

U slučaju razmatranja 3D mreža, sedam parametara je potrebno odrediti da bi se definisao datum, a karakteristike datumskog rešenja minimalnim tragom kovarijacione matrice na sve tačke mreže, zasnivaju se na sledećem:

- **težište ostaje nepromenjeno** (definisanje translacija po sve tri ose – poziciona ograničenja);
- **prosečna orijentacija (direkcionni ugao) od težišta do svih tačaka ostaje nepromenjena** (definisanje rotacija po sve tri ose);
- **prosečno rastojanje od težišta do svih tačaka ostaje nepromenjeno** (jedan faktor razmere).



Minimalni trag matrice Q_x - Ograničenja nepomerivosti težišta

Ako težište mreže možemo zapisati kao:

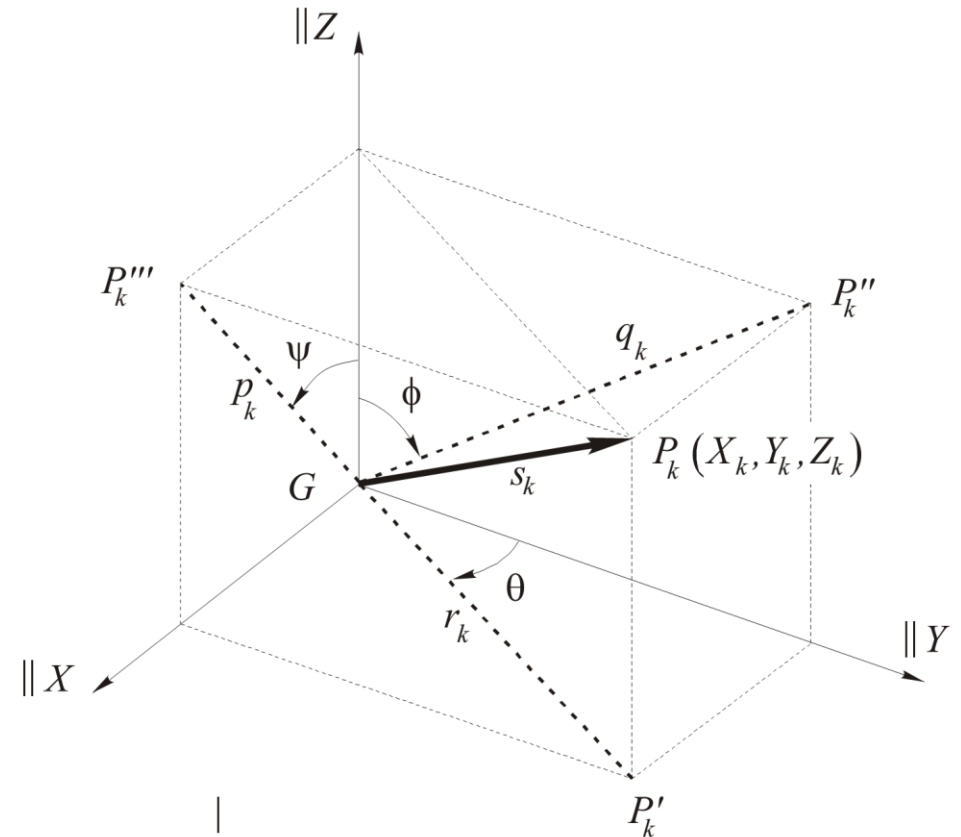
$$X_G = \sum_i \left(\frac{X_i}{m} \right); Y_G = \sum_i \left(\frac{Y_i}{m} \right); Z_G = \sum_i \left(\frac{Z_i}{m} \right)$$

Uslov nepomerivosti težišta nam daje:

$$dX_G = dY_G = dZ_G = 0$$



$$\sum_i dX_i = 0; \sum_i dY_i = 0; \sum_i dZ_i = 0.$$



Minimalni trag matrice Q_x - Ograničenja nepromenjenosti orijentacije

Datumska ograničenja rotacije po sve tri ose uvode se sa uslovom da je prosečna orijentacija (direkcionni ugao) od težišta do svih tačaka nepromenjen.

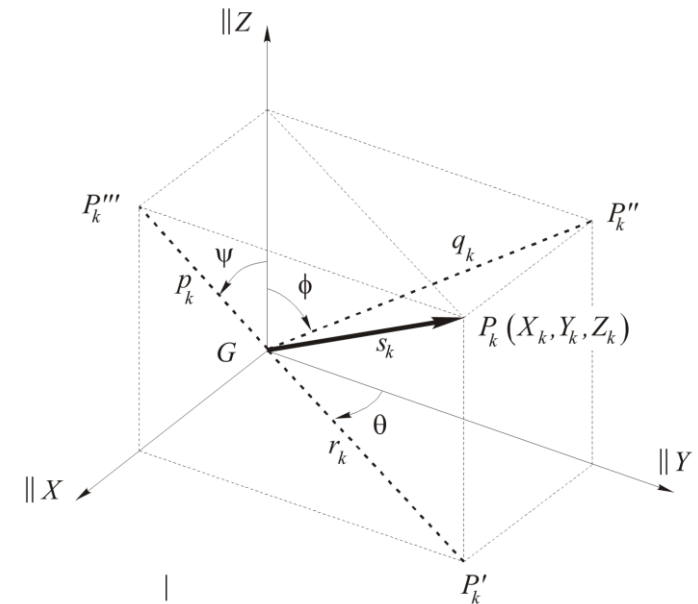
Ako orijentaciju od težišta G do proizvoljne tačke P projektuje na ravan XY u cilju definisanja rotacije oko Z ose, dobija se:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X_i - X_G}{Y_i - Y_G} = f(X_i, Y_i, X_G, Y_G)$$

Uz uslov da je $\sum_i d\theta_i = 0$ dobija se $\sum_i (Y_i dX_i - X_i dY_i) = 0$

Na isti način dolazi se do datumskih ograničenja u pogledu rotacije oko osa X i Y :

$$\begin{aligned} \sum_i (Z_i dY_i - Y_i dZ_i) &= 0 \\ \sum_i (Z_i dX_i - X_i dZ_i) &= 0 \end{aligned}$$



Minimalni trag matrice Q_x - Ograničenja nepromenjenosti orijentacije

Rastojanje od težišta G do bilo koje tačke mreže P , može se napisati kao:

$$r^2 = (X_i - X_G)^2 + (Y_i - Y_G)^2 + (Z_i - Z_G)^2$$

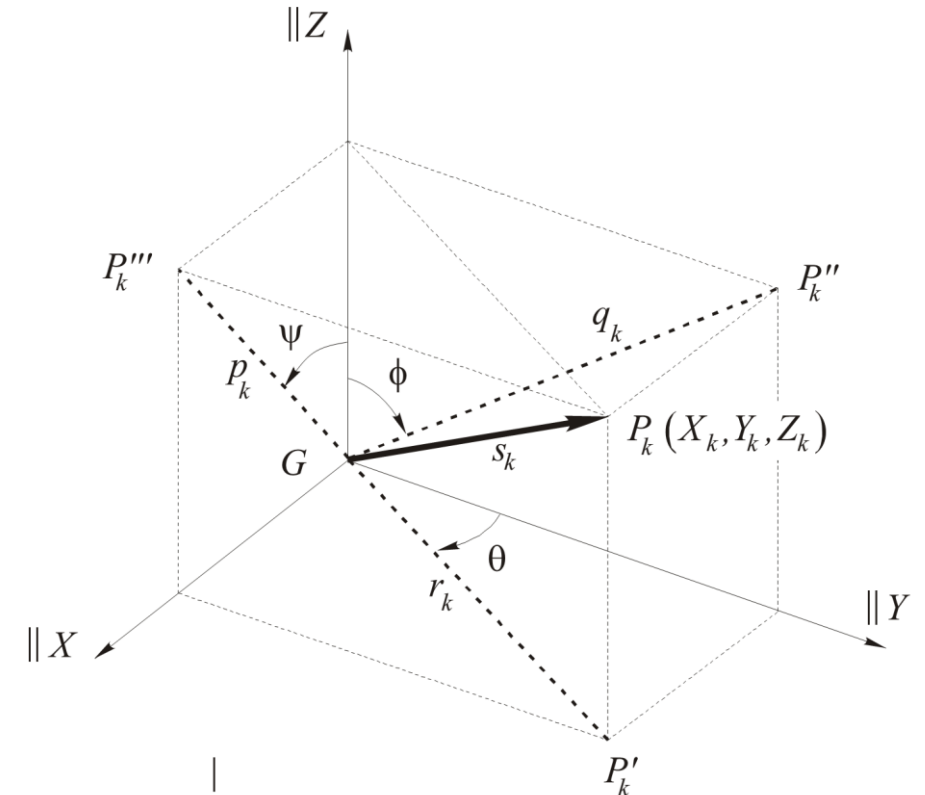
Iz čega diferenciranjem sledi:

$$dr = \frac{1}{r} [(X_i - X_G)dX_i + (Y_i - Y_G)dY_i + (Z_i - Z_G)dZ_i]$$

Ako uvedemo uslov nepromenjenosti razmere: $\sum_i dr_i = 0$

Može se izvesti datumsko ograničenje:

$$\sum_i (X_i dX_i + Y_i dY_i + Z_i dZ_i) = 0$$



Minimalni trag matrice Qx - Ograničenje razmere

Rastojanje od težišta G do bilo koje tačke mreže P, može se napisati kao:

$$r^2 = (X_i - X_G)^2 + (Y_i - Y_G)^2 + (Z_i - Z_G)^2$$

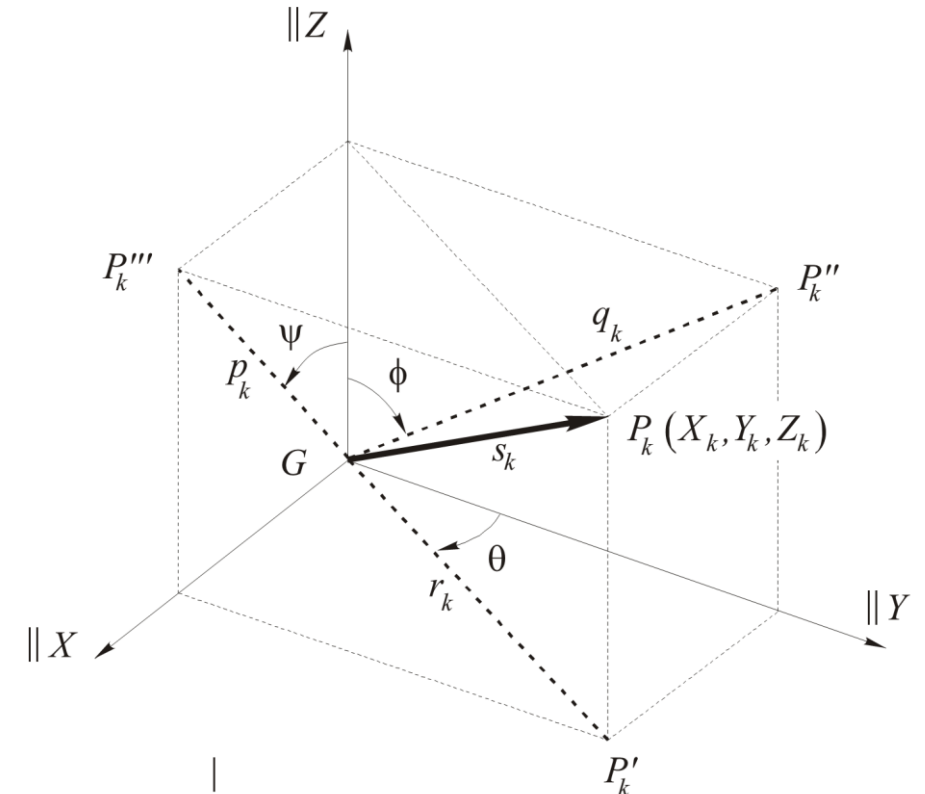
Iz čega diferenciranjem sledi:

$$dr = \frac{1}{r} [(X_i - X_G)dX_i + (Y_i - Y_G)dY_i + (Z_i - Z_G)dZ_i]$$

Ako uvedemo uslov nepromenjenosti razmere: $\sum_i dr_i = 0$

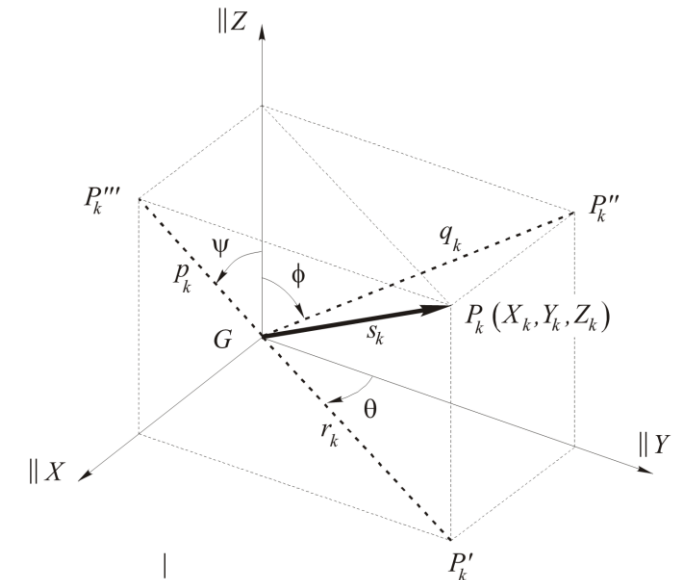
Može se izvesti datumsko ograničenje:

$$\sum_i (X_i dX_i + Y_i dY_i + Z_i dZ_i) = 0$$



Minimalni trag matrice Q_x - Ograničenje razmere

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \dots & 0 & Z_m & -Y_m \\ Z_1 & 0 & -X_1 & Z_2 & 0 & -X_2 & \dots & Z_m & 0 & -X_m \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \dots & Y_m & -X_m & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \dots & X_m & Y_m & Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dY_1 \\ dZ_1 \\ dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \\ \dots \\ dX_m \\ dY_m \\ dZ_m \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{aligned} V &= Ax + f \\ G^T x &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} N & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad N^+ = Q_{\hat{x}} = (N + GG^T)^{-1} N (N + GG^T)^{-1}$$

Realizacija geodetske mreže

Realizacija geodetske mreže je proces koji ima svoj početak i kraj, i sadrži sledeće aktivnosti:

1. Projektovanje geodetske mreže na osnovu projektnog zadatka u kojem je navedena svrha mreže, kao i drugi zahtevi i ograničenja koja se moraju uzeti u obzir kada se mreža projektuje. Cilj izrade projekta geodetske mreže jeste da se razvije metodologija koja će biti primenjena za potrebe razvijanja geodetske mreže.
2. Stabilizacija geodetskih tačaka (prema projektu);
3. Realizacija geodetskih merenja (prema projektu);
4. Obrada i analiza geodetskih merenja;
5. Sastavljanje elaborata (izveštaja) o realizaciji geodetske mreže.

Realizacija geodetske mreže

Realizacija geodetske mreže je proces koji ima svoj početak i kraj, i sadrži sledeće aktivnosti:

1. Projektovanje geodetske mreže na osnovu projektnog zadatka u kojem je navedena svrha mreže, kao i drugi zahtevi i ograničenja koja se moraju uzeti u obzir kada se mreža projektuje. Cilj izrade projekta geodetske mreže jeste da se razvije metodologija koja će biti primenjena za potrebe razvijanja geodetske mreže.
2. Stabilizacija geodetskih tačaka (prema projektu);
3. Realizacija geodetskih merenja (prema projektu);
4. Obrada i analiza geodetskih merenja;
5. Sastavljanje elaborata (izveštaja) o realizaciji geodetske mreže.

Realizacija geodetske mreže

Elaborat o realizaciji geodetske mreže je dokument koji se izrađuje na kraju realizacije geodetske mreže i kojim se dokumentuje način realizacije geodetske mreže. On treba da sadrži sve podatke kojima se dokazuje da je geodetska mreža urađena u skladu sa projektom.

Elaborat o realizaciji geodetskih radova u inženjerstvu u tehničkom smislu treba da sadrži:

1. Opis radova (predmet, osnov za realizaciju itd.);
2. Opis položaja tačaka sa opisom stabilizacije;
3. Opis merne kampanje (korišćena oprema, sertifikati opreme, rezultati merenja itd.);
4. Analiza i obrada rezultata merenja (opis analize podataka, preliminarna analiza, izravnjanje itd.) ;
5. Rezultati obrade podataka i prezentacija;
6. Zaključak (sumarni pregled podataka).

Realizacija geodetske mreže

Elaborat o realizaciji geodetskih radova u inženjerstvu u formaln nom smislu treba da sadrži:

1. **Opštu dokumentaciju (administrativni dokumenti, licence firme i izvođača)**
2. **Tekstualni deo (Tehnički izveštaj)**
 - Opis radova (predmet, osnov za realizaciju itd.)
 - Realizacija merenja (opis merne kampanje)
 - Analiza i obrada rezultata merenja (opis analize podataka, preliminarna analiza, izravnanje itd.)
 - Rezultati obrade podataka i prezentacija.
 - Zaključak (sumarni pregled rezultata)
3. **Prilozi (Grafički i numerički)**

Hvala na pažnji!